

GENERAL LIBRARY
SEP 9 1920
UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. CREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 62. Heft 1.

DER GANZEN REIHE 367. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.



LEIPZIG.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRHENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Im Jahre 1920 erscheinen Bd. 61, 62 und 63 à 8 Hefte. Preis von Bd. 61 u. 62 je M 45.—.

Nach dem Ausland in der Währung des betr. Landes.

Ausgegeben am 20. Mai 1920.

Inhalt.

	Seite
1. Jan Weyssenhoff. Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen und der Stokes-Cunninghamschen Formel. I. Hydrodynamischer Teil	1
2. Gustav Mie. Die Einführung eines vernunftgemäßen Koordinatensystems in die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Gravitationsfeld einer schweren Kugel	46
3. C. Dieterici. Zum Problem der Zustandsgleichung	75
4. A. Sommerfeld. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie	95

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleiherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen der beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 62.

1. *Betrachtungen über den Gültigkeitsbereich der Stokesschen und der Stokes-Cunninghamschen Formel. I. Hydrodynamischer Teil;* von Jan Weyssenhoff.

§ 1. Einleitung.

Die vorliegende Abhandlung enthält eine kritische Zusammenstellung unserer Kenntnisse über die Gesetze der „langsamen“ Bewegung von Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen. Der erste Teil ist der hydrodynamischen Seite des Problems gewidmet, im zweiten wird die gaskinetische Auffassung vertreten. Es wird dort auf die äußerst schwachen theoretischen Grundlagen der so oft angewandten Stokes-Cunninghamschen Formel hingewiesen. Falls manche der hier enthaltenen Tatsachen und Bemerkungen selbstverständlich oder gar trivial erscheinen sollten, so diene der Hinweis als Entschuldigung, daß in vielen der besprochenen theoretischen und experimentellen Arbeiten verschiedene Resultate der früheren Forschung teilweise übersehen oder gar mißdeutet wurden. Auch harren noch einige Unstimmigkeiten zwischen experimentellen und theoretischen Ergebnissen ihrer endgültigen Erklärung (vgl. insbesondere § 7b).

Wir präzisieren zuerst die Bedeutung einiger Benennungen, die wir im weiteren durchgehends gebrauchen werden. Ein Teilchen bewege sich unter dem Einflusse einer konstanten Kraft F in einem Medium, dessen Koeffizienten der inneren Reibung wir mit μ bezeichnen wollen. Nach Erreichung des stationären Bewegungszustandes wird sich das Teilchen mit einer konstanten Geschwindigkeit V bewegen, und wenn wir

$$(1) \quad F = W \cdot V \quad \text{und} \quad V = B \cdot F$$

setzen, so nennen wir, wie gewöhnlich, B die *Beweglichkeit* des Teilchens; ihren reziproken Wert W werden wir als *Widerstandskoeffizienten* bezeichnen. In allen weiter unten besprochenen Fällen wird die Geschwindigkeit V der Kraft F

proportional, d. h. W bzw. B werden von V bzw. F unabhängig sein. Wo sie nicht direkt aus den Grundannahmen erschlossen werden kann, da wird diese Proportionalität von vornherein durch eine besondere (stillschweigende) Annahme eingeführt werden.

Die Ermittlung des Widerstandskoeffizienten W als Funktion der Eigenschaften des Teilchens und des Mediums, in welchem es sich bewegt, bildet den Gegenstand der vorliegenden Besprechung.

§ 2. Die allgemeine Formulierung des Problems der „langsamen“ Bewegung einer zähen Flüssigkeit.

Je langsamer die Bewegung einer Flüssigkeit ist, um so mehr überwiegt die Wirkung der inneren Reibung diejenige der Trägheit. Im Grenzfall unendlich kleiner Geschwindigkeiten fallen in den klassischen Navier-Poissonschen Differentialgleichungen der Bewegung einer zähen Flüssigkeit die „Trägheitsglieder“ [mit $u(\partial u/\partial x)$ usw.] fort, und für stationäre Bewegung bei Abwesenheit äußerer Volumkräfte reduzieren sich diese Gleichungen auf die einfache Form

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \mu \Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \Delta w.$$

Hierin bedeuten u, v, w die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in den rechtwinkligen Koordinaten x, y, z , μ den Koeffizienten der inneren Reibung, p den Druck und

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Dazu tritt gewöhnlich noch, als Spezialfall der physikalischen Beziehung zwischen Druck und Dichte, die Bedingung der Inkompressibilität

$$(2') \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

In Verbindung mit den nötigen Randwertangaben bilden die Gleichungen (2) und (2') die mathematische Formulierung des Problems der „langsamen“, stationären Bewegung einer zähen Flüssigkeit.¹⁾ In jedem einzelnen Falle muß man

1) A. E. H. Love, *Enz. d. math. Wiss.* IV, 15, Hydrodynamik I, § 13; da die „Langsamkeit“ der Bewegung nicht nur von der Geschwindigkeit und der Zähigkeit, sondern auch von den Raumabmessungen

natürlich die Berechtigung der gemachten Vernachlässigungen besonders untersuchen (vgl. § 6).

Die Art der Randwertangaben hängt wesentlich davon ab, ob man an der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit festen Körpern Gleitung zuläßt oder nicht. Im letzten Falle stimmt in jedem Punkte der Berührungsfläche die Geschwindigkeit der Flüssigkeit mit der des festen Körpers überein. Was die tropfbaren Flüssigkeiten anbetrifft, so nimmt man jetzt gewöhnlich an, daß diese letzte Bedingung immer erfüllt ist; jedenfalls ist das Bestehen der Gleitung zwischen einer tropfbaren Flüssigkeit und einer festen Oberfläche nie einwandfrei festgestellt worden.¹⁾ Anders verhält es sich aber mit verdünnten Gasen, für welche die Gleitung sowohl experimentell gefunden als auch theoretisch begründet wurde. Auf diesen Gegenstand werden wir im zweiten Teile noch näher zu sprechen kommen.

Vom hydrodynamisch-phänomenologischen Standpunkte aus wurde die Möglichkeit der Gleitung bereits von Navier und Poisson berücksichtigt. Die Gleitung besteht bekanntlich in einem Unterschied der Tangentialgeschwindigkeiten des festen Körpers und der angrenzenden Flüssigkeit. Navier und Poisson nahmen nun an, daß die Kraft pro Flächeneinheit, mit welcher die Flüssigkeit und der feste Körper aufeinander einwirken, dieser Differenz proportional sei, und da diese Kraft dem tangentialen Zug in der Grenzschicht der Flüssigkeit das Gleichgewicht halten muß, so ergibt sich daraus die erwünschte Grenzbedingung, die im Falle paralleler Laminarbewegung [$u = f(y)$, $v = w = 0$] die einfache Form

$$(3) \quad \beta(u - u') = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

annimmt. Hierin bedeutet u die Geschwindigkeit der Flüssigkeit, u' diejenige des festen Körpers und β ist der sogenannte

abhängig ist (vgl. § 6), so schlägt M. Smoluchowski (Krak. Anz. S. 143, 1904) zur besseren Charakterisierung dieses Bewegungszustandes den Ausdruck „mouvement calme“ [ruhige, sanfte Bewegung] vor, während L. Prandtl („Abriß der Lehre von der Flüssigkeits- und Gasbewegung“, aus dem „Handwörterbuch der Naturwissenschaften“, Bd. 4) den Ausdruck „schleichende“ Bewegung gebraucht.

1) Vgl. A. E. H. Love, a. a. O., und L. Graetz, „Reibung“ in Winkelmanns Handbuch der Physik, Bd. I, 2.

Koeffizient der äußeren Reibung, d. i. der Betrag der Reibung pro Einheit der Oberfläche und pro Einheit der Relativgeschwindigkeit.

Da die Gleitung um so mehr in Betracht kommt, je kleiner die äußere und je größer die innere Reibung ist, so haben Helmholtz und Piotrowski¹⁾ als Maß der Gleitung das Verhältnis

$$(4) \quad \gamma = \frac{\mu}{\beta}$$

unter dem Namen *Gleitungskoeffizient* eingeführt. Derselbe Name wird auch in der kinetischen Gastheorie gebraucht.

Lorentz²⁾ hat eine Reihe von allgemeinen Theoremen über die „langsame“, stationäre Bewegung von festen Körpern in reibenden Flüssigkeiten (bei Abwesenheit von Gleitung) aufgestellt, deren Anwendung wir im § 8 kennen lernen werden. Den Zusammenhang der Lorentzschen Arbeit mit allgemeinen Sätzen der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ersieht man am besten durch Vergleich mit analogen Resultaten der Elastizitätstheorie (Reziprozitätstheorem von Betti, Formeln für die Verschiebungskomponenten von Somigliana, Integration mittels verallgemeinerter Greenscher Funktionen), wie sie z. B. in dem Enzyklopädieartikel von Tedone³⁾ zusammengestellt und besprochen sind. Dieser Parallelismus stammt daher⁴⁾, daß die Gleichungen (2) der „langsamen“ Bewegung einer reibenden Flüssigkeit der Form nach identisch mit den Gleichungen für das elastische Gleichgewicht isotroper Körper sind; an Stelle der Verschiebungskomponenten der Elastizitätstheorie treten in (2) die Geschwindigkeitskomponenten ein und die beiden Laméschen Elastizitätskonstanten λ und μ reduzieren sich durch den Ansatz⁵⁾

$$(5) \quad 3\lambda + 2\mu = 0$$

auf nur eine Konstante, den sogenannten Koeffizienten μ der inneren Reibung der Flüssigkeit.

1) Vgl. H. Helmholtz, Wiss. Abh. I. S. 172.

2) H. A. Lorentz, Abh. über theor. Physik, I. S. 23.

3) O. Tedone, Allg. Theoreme der math. Elastizitätslehre, *Enz. d. math. Wiss.* IV. 24.

4) Vgl. A. Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* 21. S. 697. 1911.

5) Vgl. z. B. A. G. Webster, „The Dynamics of particles ...“ S. 550, und A. E. H. Love, a. a. O., § 12.

Im weiteren spezialisieren wir unser Problem auf die Bewegung kugelförmiger Teilchen; nur gelegentlich werden wir noch über anders gestaltete Teilchen einige Bemerkungen einzuflechten haben.

§ 8. Das Stokessche Gesetz.

Die Lösung des Problems der „langsamen“, stationären Bewegung einer Kugel in einer unbegrenzten, inkompressiblen, zähen Flüssigkeit unter dem Einflusse einer konstanten Kraft verdanken wir Stokes, der sie im Jahre 1851 in einer Abhandlung über die Bewegung von Pendeln¹⁾, mit Hilfe der nach ihm benannten Stromfunktion²⁾ gegeben hat. Er fand, daß die Flüssigkeit auf die Kugel eine der Translation der Kugel entgegengesetzt gerichtete Kraft ausübt, die der Geschwindigkeit V der Kugel proportional ist. Der Widerstandskoeffizient drückt sich durch die folgende Formel aus:

$$(6) \quad W = 6\pi\mu a$$

(a Radius der Kugel), die allgemein unter dem Namen *Stokes'sches Gesetz* oder *Stokessche Formel* bekannt ist. Bei den Anwendungen kommt meistens die Spezialform

$$(6') \quad V = \frac{2}{9} a^2 g \frac{\sigma' - \sigma}{\mu}$$

in Betracht, die die Geschwindigkeit einer unter dem Einflusse der Schwerkraft $[\frac{4}{3}\pi a^3 (\sigma' - \sigma) g]$ fallenden Kugel von der Dichte σ' in einem zähen Medium von der Dichte σ angibt.

Eine einfache Ableitung des Stokesschen Gesetzes findet man in Kirchhoffs „Mechanik“³⁾ und eine allgemeinere Methode zur Lösung der Gleichungen (2) durch Entwicklung in eine Reihe von räumlichen Kugelfunktionen in den §§ 323 bis 325, 335—336 des Lehrbuches der Hydrodynamik von Lamb.⁴⁾ Andere Lösungsmethoden wurden von Boussinesq (vgl. § 8 und 12), Noether, Oseen (vgl. § 7a) u. a. gegeben.

1) G. G. Stokes, Cambr. Trans. 9. S. 8. 1851; Papers III, S. 59.

2) Vgl. H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (deutsch von J. Friedel) 1907, §§ 94, 95 und 325.

3) G. Kirchhoff, Vorl. über math. Phys., 4. Aufl., Leipzig 1897, Bd. I, S. 378.

4) H. Lamb, a. a. O.

Wir nehmen davon Abstand, einen vollständigen Beweis des Stokesschen Gesetzes hier wiederzugeben und erwähnen nur einige Resultate, auf die wir uns im folgenden mehrmals beziehen werden.

Da die Kugel bei der Stokesschen Problemstellung ihre Lage im Raume fortwährend ändert, so kann die Flüssigkeitsbewegung in bezug auf ruhende Achsen selbstverständlich nicht stationär sein; man pflegt deshalb das in Frage stehende Problem durch ein analoges zu ersetzen, indem man die Kugel als ruhend und die Flüssigkeit als im Unendlichen mit der konstanten Geschwindigkeit $-V$ in der x -Richtung strömend annimmt („ruhende Kugel in Parallelströmung“).

Die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit sind dann durch folgende Formeln gegeben¹⁾:

$$(7) \quad \begin{cases} u = V\left(\frac{a}{r} - 1\right) + \frac{1}{4}Va(r^2 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{r}, \\ v = \quad \quad \quad + \frac{1}{4}Va(r^2 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{1}{r}, \\ w = \quad \quad \quad + \frac{1}{4}Va(r^2 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}\frac{1}{r} \end{cases}$$

und der Druck

$$(8) \quad p = \frac{3}{4}\mu a V \frac{x}{r^3} + \text{konst.}$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ = Abstand vom Mittelpunkte der Kugel). Diese Werte befriedigen die Gleichungen (2) mit den Grenzbedingungen $u = v = w = 0$ für $r = a$ und $u = -V, v = w = 0$ für $r = \infty$, wovon man sich durch direktes Einsetzen überzeugen kann.

Wenn wir jetzt dem ganzen betrachteten System eine Translationsgeschwindigkeit V in der x -Richtung erteilen, so kommt dadurch die Flüssigkeit im Unendlichen zur Ruhe, während die Kugel die Geschwindigkeit V erhält. Dadurch werden die Bedingungen der ursprünglichen Fragestellung wieder hergestellt; der entstandene Bewegungszustand ist stationär in bezug auf ein mit der Kugel sich bewegendes, nicht aber in bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem.

Eine Zeichnung der Stromlinien beim Problem der ruhenden Kugel in Parallelströmung findet man in dem Lehrbuche der

1) Vgl. H. Lamb, Phil. Mag. 21. S. 112. 1911.

Hydrodynamik von Lamb, S. 685. Aus dieser Figur oder aus der Linearität der Gleichungen (2) bzw. aus den Formeln (7) ist die bemerkenswerte symmetrische Form der Stromlinien vor und hinter der Kugel zu ersehen, welche von der Vernachlässigung der Wirkung der Trägheit herrührt.

Endlich findet man aus (7) für die Komponenten ξ , η , ζ des Rotors der Strömungsgeschwindigkeit folgende äußerst einfache Ausdrücke:

$$(9) \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \eta = + \frac{3}{2} a V \frac{z}{r^3}, \quad \zeta = - \frac{3}{2} a V \frac{y}{r^3}.$$

Den Symmetrieverhältnissen entsprechend sind die Wirbellinien Kreise um die x -Achse.

Wir schließen mit einer interessanten Bemerkung, die zuerst wohl von Lord Rayleigh¹⁾ gemacht wurde. Sowohl das Bewegungsmoment wie die Energie der gesamten Flüssigkeit fallen in der von Stokes gegebenen Lösung unendlich aus. Wir müssen uns vergegenwärtigen, daß zur vollständigen Herstellung des betrachteten stationären Bewegungszustandes eine unendlich lange Einwirkung der konstanten Kraft F auf unsere Kugel erforderlich wäre (vgl. aber die Theorie von Oseen, § 7a).

§ 4.

Die Voraussetzungen, die dem Stokesschen Gesetze zugrunde liegen, können wir schematisch etwa folgendermaßen zusammenfassen:

- I. Annahme einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik (vgl. § 5).
- II. „Langsamkeit“ der Bewegung, d. i. Vernachlässigung der Trägheitsglieder in den hydrodynamischen Grundgleichungen (§§ 6, 7).
- III. Unbegrenztheit der im Unendlich ruhenden Flüssigkeit (§ 8).
- IV. Stationärer Bewegungszustand (§ 9).
- V. Kugelgestalt des sich bewegenden Körpers (§ 10).
- VI. Verschwinden der Gleitung zwischen der Flüssigkeit und der Kugel (§ 11).
- VII. Voraussetzung, daß die Kugel ein fester Körper ist (§ 12).

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 374. 1886; Sc. Papers, Bd. III, S. 480.

Wir nehmen davon Abstand, einen vollständigen Beweis des Stokesschen Gesetzes hier wiederzugeben und erwähnen nur einige Resultate, auf die wir uns im folgenden mehrmals beziehen werden.

Da die Kugel bei der Stokesschen Problemstellung ihre Lage im Raume fortwährend ändert, so kann die Flüssigkeitsbewegung in bezug auf ruhende Achsen selbstverständlich nicht stationär sein; man pflegt deshalb das in Frage stehende Problem durch ein analoges zu ersetzen, indem man die Kugel als ruhend und die Flüssigkeit als im Unendlichen mit der konstanten Geschwindigkeit $-V$ in der x -Richtung strömend annimmt („ruhende Kugel in Parallelströmung“).

Die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit sind dann durch folgende Formeln gegeben¹⁾:

$$(7) \quad \begin{cases} u = V\left(\frac{a}{r} - 1\right) + \frac{1}{4} Va(r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r}, \\ v = \quad \quad \quad + \frac{1}{4} Va(r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r}, \\ w = \quad \quad \quad + \frac{1}{4} Va(r^2 - a^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r} \end{cases}$$

und der Druck

$$(8) \quad p = \frac{3}{4} \mu a V \frac{x}{r^3} + \text{konst.}$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ = Abstand vom Mittelpunkte der Kugel). Diese Werte befriedigen die Gleichungen (2) mit den Grenzbedingungen $u = v = w = 0$ für $r = a$ und $u = -V, v = w = 0$ für $r = \infty$, wovon man sich durch direktes Einsetzen überzeugen kann.

Wenn wir jetzt dem ganzen betrachteten System eine Translationsgeschwindigkeit V in der x -Richtung erteilen, so kommt dadurch die Flüssigkeit im Unendlichen zur Ruhe, während die Kugel die Geschwindigkeit V erhält. Dadurch werden die Bedingungen der ursprünglichen Fragestellung wieder hergestellt; der entstandene Bewegungszustand ist stationär in bezug auf ein mit der Kugel sich bewegendes, nicht aber in bezug auf ein ruhendes Koordinatensystem.

Eine Zeichnung der Stromlinien beim Problem der ruhenden Kugel in Parallelströmung findet man in dem Lehrbuche der

1) Vgl. H. Lamb, Phil. Mag. 21. S. 112. 1911.

Hydrodynamik von Lamb, S. 685. Aus dieser Figur oder aus der Linearität der Gleichungen (2) bzw. aus den Formeln (7) ist die bemerkenswerte symmetrische Form der Stromlinien vor und hinter der Kugel zu ersehen, welche von der Vernachlässigung der Wirkung der Trägheit herrührt.

Endlich findet man aus (7) für die Komponenten ξ , η , ζ des Rotors der Strömungsgeschwindigkeit folgende äußerst einfache Ausdrücke:

$$(9) \quad \xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \eta = + \frac{3}{2} a V \frac{z}{r^3}, \quad \zeta = - \frac{3}{2} a V \frac{y}{r^3}.$$

Den Symmetrieverhältnissen entsprechend sind die Wirbellinien Kreise um die x -Achse.

Wir schließen mit einer interessanten Bemerkung, die zuerst wohl von Lord Rayleigh¹⁾ gemacht wurde. Sowohl das Bewegungsmoment wie die Energie der gesamten Flüssigkeit fallen in der von Stokes gegebenen Lösung unendlich aus. Wir müssen uns vergegenwärtigen, daß zur vollständigen Herstellung des betrachteten stationären Bewegungszustandes eine unendlich lange Einwirkung der konstanten Kraft F auf unsere Kugel erforderlich wäre (vgl. aber die Theorie von Oseen, § 7a).

§ 4.

Die Voraussetzungen, die dem Stokesschen Gesetze zugrunde liegen, können wir schematisch etwa folgendermaßen zusammenfassen:

- I. Annahme einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik (vgl. § 5).
- II. „Langsamkeit“ der Bewegung, d. i. Vernachlässigung der Trägheitsglieder in den hydrodynamischen Grundgleichungen (§§ 6, 7).
- III. Unbegrenztheit der im Unendlich ruhenden Flüssigkeit (§ 8).
- IV. Stationärer Bewegungszustand (§ 9).
- V. Kugelgestalt des sich bewegenden Körpers (§ 10).
- VI. Verschwinden der Gleitung zwischen der Flüssigkeit und der Kugel (§ 11).
- VII. Voraussetzung, daß die Kugel ein fester Körper ist (§ 12).

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 374. 1886; Sc. Papers, Bd. III, S. 480.

Fast alle diese Annahmen und Voraussetzungen gaben Anlaß zu theoretischen und experimentellen Arbeiten, die wir jetzt der Reihe nach besprechen wollen.

§ 5. Die Annahme einer inkompressiblen, zähen Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik.

Die Annahme einer Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik impliziert die Vernachlässigung der atomaren Diskontinuitäten des Mediums, in welchem sich die Kugel bewegt, was nur dann gerechtfertigt ist, wenn die Dimensionen der Kugel groß sind im Vergleiche zu dem Maßstabe der atomistischen Struktur dieses Mediums. Es ergibt sich daraus für den Radius a der Kugel eine untere Grenze, die ja selbstverständlich mit der im folgenden Paragraphen enthaltenen Bedingung (12) nichts zu tun hat. Des Zusammenhanges wegen verlegen wir die genauere Besprechung dieser Frage in den zweiten Teil und erledigen zuerst die rein hydrodynamische Seite des Problems.

Hier fällt zuerst die Voraussetzung der Inkompressibilität auf. Zwar wird bei tropfbaren Flüssigkeiten die Vernachlässigung ihrer Zusammendrückbarkeit sicher erlaubt sein, aber die Behandlung eines Gases als inkompressibles Medium kann von vornherein ziemlich bedenklich erscheinen. Eine nähere Betrachtung zeigt jedoch, daß bei „langsamer“, stationärer Bewegung die Kompressibilität keinen merklichen Einfluß auf den Bewegungszustand ausüben kann. Schon ohne spezielle Rechnung können wir uns eine ungefähre Vorstellung von den hier obwaltenden Verhältnissen machen. Da die Kompressibilität zu Störungen Anlaß gibt, die sich mit Schallgeschwindigkeit fortpflanzen, so ist es ziemlich einleuchtend, daß merkliche Verdichtungen nur dann entstehen können, wenn die Kugelgeschwindigkeit mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar wird. Die Kleinheit des maßgebenden Verhältnisses dieser beiden Geschwindigkeiten wird aber durch die im folgenden Paragraphen angeführte Bedingung der „Langsamkeit“ der Bewegung gewährleistet. Man überzeugt sich leicht, daß die Geschwindigkeiten, die der Ungleichung (12) genügen, noch bei den kleinsten in Betracht kommenden Radien, als verschwindend klein gegen die Schallgeschwindigkeit angesehen werden dürfen.

Eine genauere Durchrechnung dieses Problems führt im

großen und ganzen zu den nämlichen Resultaten, wie bereits O. E. Meyer¹⁾ bei der Behandlung des speziellen Problems der kleinen Schwingungen einer Kugel in einem zähen Medium (vgl. auch weiter unten § 9) gefunden hat. Einige Bemerkungen, die mit unserer Frage im Zusammenhang stehen, findet man auch in einer Arbeit von Lord Rayleigh²⁾ über das Strömen einer kompressiblen Flüssigkeit um ein Hindernis. Von einem etwas allgemeineren Gesichtspunkte ging Smoluchowski³⁾ in seiner Abhandlung über die Grundgleichungen der Ärodynamik aus, wo er nicht nur die Kompressibilität, sondern auch den Einfluß der Temperaturunterschiede, der Wärmestönungen, Wärmeleitung usw. in den Kreis seiner Betrachtungen zog. Insbesondere berechnete er auch näherungsweise die Einwirkung dieser verschiedenen Faktoren auf die Lösung des Stokesschen Problems und kam zu dem Resultate, daß sie alle bei „langsamer“ Bewegung zu keinen meßbaren Störungen Anlaß geben können.⁴⁾

§ 6. Die „Langsamkeit“ der Bewegung.

Die vom hydrodynamischen Standpunkte wichtigste Einschränkung des Gültigkeitsbereiches des Stokesschen Gesetzes ist zweifellos die vorausgesetzte „Langsamkeit“ der Bewegung. Wir wissen, daß die Erscheinungen bei zunehmender Geschwindigkeit der Kugel immer komplizierter werden, „eine regellose wirbelnde Bewegung wird in einer Flüssigkeitsschicht nahe bei dem Körper erzeugt, und eine sich ausbreitende Schleppe von Wirbeln wird zurückgelassen, während die Bewegung in einiger Entfernung seitlich verhältnismäßig sanft und gleichförmig vor sich geht“.⁵⁾ Die hier auftretende „regellose wirbelnde Bewegung“ („Eddies“), die mit den eigentlichen Wirbeln („Vortices“) der klassischen Hydrodynamik nur sehr wenig zu tun hat⁶⁾, entzieht sich bis jetzt fast vollständig der theoretischen Behandlung, und wenn es sogar

1) O. E. Meyer, Crelles Journ. 75. S. 31. 1873.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 32. S. 1. 1916.

3) M. Smoluchowski, Anz. Ak. Krakau, S. 143, 1904.

4) M. Smoluchowski, a. a. O. § 28.

5) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (deutsch von J. Friedel), S. 736.

6) Vgl. A. E. H. Love, a. a. O., Bemerkung 97 auf S. 77.

einmal gelingen sollte, die vollständigen Navier-Poisson-schen Differentialgleichungen (mit gleichzeitiger Berücksichtigung der Trägheit und der Viskosität) für diesen Fall zu integrieren, so ist es höchst zweifelhaft, ob dieser Lösung überhaupt irgendeine physikalische Bedeutung zukäme; es scheint vielmehr, daß beim Eintreten der „turbulenten Bewegung“ nicht nur die klassischen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik ihre Gültigkeit verlieren, sondern daß hier überhaupt die altüblichen Methoden, die auf einer eindeutigen Beschreibung der Naturvorgänge mittels einiger weniger Differentialgleichungen beruhen, versagen und daß wahrscheinlichkeits-theoretische Überlegungen, statistische Betrachtungen, Schwankungsberechnungen u. dgl. zu Hilfe gezogen werden müssen. Diese höchst interessanten Fragen fallen jedoch völlig aus dem Rahmen der vorliegenden Abhandlung heraus; hier müssen wir uns nur nach einem geeigneten Kriterium umsehen, mit dessen Hilfe wir die „Langsamkeit“ der Bewegung zu beurteilen haben.

Zu einem solchen gelangen wir durch Vergleich der Größenordnung der vernachlässigten „Trägheitsglieder“ in den vollständigen Navier-Poisson-schen Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit (σ = Dichte der Flüssigkeit)

$$(10) \quad \sigma u \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma v \frac{\partial u}{\partial y} \text{ usw. } \left[\text{Größenordnung: } \frac{\sigma a}{r^3} V^2 \right]$$

mit der Größenordnung der in (2) verbliebenen „Reibungsglieder“

$$(11) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \left[\text{Größenordnung: } \frac{\mu a}{r^3} V \right].$$

Die gesuchten Größenordnungen sind in die eckigen Klammern bereits eingetragen. Das zweite Resultat ergibt sich unmittelbar aus (8), vom ersten, das aus (7) ermittelt wurde, gibt man sich am leichtesten Rechenschaft, wenn man bedenkt, daß u, v, w von der Größenordnung von V sind und ihre ersten Ableitungen von der Größenordnung $(a V/r^2)$ der ξ, η, ζ in (9). Damit nun die Stokessche Formel irgendwelche Ansprüche auf Richtigkeit erheben kann, müssen jedenfalls die Ausdrücke (10) in der Umgebung der Kugel (r von der Größenordnung von a) gegen die Ausdrücke (11) verschwinden. Diese

Forderung führt zu der folgenden, zuerst von Lord Rayleigh¹⁾ abgeleiteten Bedingung für die „Langsamkeit“ der Bewegung beim Stokesschen Problem

$$(12) \quad R = \frac{a \sigma V}{\mu} \ll 1.$$

In dem links stehenden Ausdrucke, den wir mit einem R bezeichnet haben, erkennen wir die sogenannte „Reynoldssche Zahl“, die auch für den Eintritt der turbulenten Bewegung maßgebend ist. Doch soll das keineswegs bedeuten, daß es sich bei den ersten Abweichungen vom Stokesschen Gesetz, die durch das Hineinspielen der vernachlässigten Trägheit der Flüssigkeit zustande kommt, gleich um turbulente Bewegungszustände handeln sollte wie das von manchen Forschern, die sich des Stokesschen Gesetzes bedient haben, gelegentlich erwähnt wird. Es ist übrigens fraglich, ob bei der Translationsgeschwindigkeit einer Kugel in einem zähen Medium eine scharf definierte Grenze zwischen der regelmäßigen und der turbulenten Bewegung überhaupt vorhanden ist; weiter sei noch darauf hingewiesen, daß der Eintritt der Turbulenz bei Flüssigkeitsströmung in Röhren Reynoldsschen Zahlen von über 1000 entspricht, während wir gleich sehen werden, daß die ersten Abweichungen vom Stokesschen Gesetz sich bereits bei R etwa gleich 0,2 bemerkbar machen. Das Erscheinen der Reynoldsschen Zahl in der Ungleichung (12) erklärt sich einfach dadurch, daß der Verlauf der beiden Erscheinungen durch dieselben physikalischen Größen bedingt wird; der Vergleich der Dimensionen der „Trägheitsglieder“ und der „Reibungsglieder“ (Anwendung des Prinzips der „mechanischen Ähnlichkeit“) führt unmittelbar zu dem Resultate, daß die Gültigkeit der Stokesschen Formel, ebenso wie der Eintritt der turbulenten Bewegung, wesentlich nur von dem Werte der Reynoldsschen Zahl abhängig sein kann.

Die Überlegungen, mit deren Hilfe wir die Bedingung (12) abgeleitet haben, scheinen aber etwas mehr als bloße Dimensionsbetrachtungen zu sein, da sie uns zu dem Schluß geführt haben, daß es für die Gültigkeit der Stokesschen Formel notwendig ist, daß R viel kleiner als die Einheit sei. Dieses

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 36. S. 365. 1893; vgl. auch H. A. Lorentz, a. a. O. S. 41.

Resultat sagt aber nur sehr wenig aus. Es wäre vielmehr die Beantwortung der folgenden Frage erwünscht: Unterhalb welcher Grenze muß R liegen, damit man bei der Anwendung der Stokesschen Formel sicher sein kann, keine größeren Fehler als so und so viel Prozent zu begehen? Es ist bis heutzutage — von einem diesbezüglichen Versuche, den wir am Ende des folgenden Paragraphen besprechen werden, abgesehen — nicht gelungen, der Theorie derartige Auskünfte abzuwingen; möglicherweise kann diese Frage erst durch die Auflösung der vollständigen Navier-Poissonschen Gleichungen vollkommen streng beantwortet werden. Hier ist eine Bemerkung am Platze, welche die Mathematiker nicht müde werden, den Physikern zu wiederholen: Um aus den Fehlern einer nur angenähert gültigen Differentialgleichung, insbesondere wenn es sich um eine partielle Differentialgleichung handelt, auf die Fehler des Integrals dieser Gleichung schließen zu können, ist eine besondere Untersuchung notwendig; man kann einfache Beispiele angeben, wo die Anwesenheit beliebig kleiner Zusatzglieder in der Differentialgleichung den Verlauf der Erscheinung, die durch diese Gleichung beschrieben wird, vollständig verändert.¹⁾

Die Antwort auf die eben aufgeworfene Frage, der die Theorie bis heute machtlos gegenüber steht, kann aber durch unmittelbare Versuche erhalten werden. Zuerst wollen wir noch der Ungleichung (12) eine andere Form geben, die für den experimentell wichtigsten Fall, daß die äußere Kraft sich auf die Schwerkraft reduziert, besonders geeignet erscheint. Die Fallgeschwindigkeit V ist in diesem Falle mittels der Beziehung (6') mit dem Kugelradius verknüpft und für eine bestimmte Flüssigkeit und ein bestimmtes Kugelmateriale hängt die Anwendbarkeit des Stokesschen Gesetzes nur von dem Kugelradius ab; mit wachsender Größe der Kugel hört die Gültigkeit dieses Gesetzes allmählich auf. Es ist dann zweckmäßig, einen sogenannten „kritischen Radius“ a einzuführen²⁾, für welchen das Verhältnis $a\sigma V/\mu$ gerade gleich eins wird. Mit Hilfe der Beziehung (6') finden wir:

1) Vgl. z. B. E. Borel, *Introduction géométrique à quelques théories phys.*, Note IV.

2) Nach H. S. Allen, *Phil. Mag.* 50. S. 323. 1900.

$$(13') \quad \bar{a} = \sqrt[3]{\frac{q \mu^3}{2 \sigma (\sigma' - \sigma) g}}$$

und

$$(14') \quad R = \frac{a \sigma V}{\mu} = \frac{a^3}{\bar{a}^3}.$$

Die Bedingung (12) kann nun folgendermaßen geschrieben werden:

$$(12') \quad a \leq \bar{a}.$$

Bei seinen Untersuchungen über fallende Metallkugeln in verschiedenen Ölen fand nun Arnold¹⁾ (vgl. auch §§ 7b, 8 und 12) das Stokessche Gesetz für

$$(15') \quad a < 0,6 \bar{a}$$

bestätigt. Bei etwas größeren Radien beobachtete er merkliche Abweichungen davon. Die Genauigkeit seiner Versuche betrug etwa $\frac{1}{2}$ —1%. Die Ungleichung (15') oder

$$(15) \quad \frac{a \sigma V}{\mu} < 0,2$$

können wir also als die experimentell gefundene Bedingung der Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes mit einer $\frac{1}{2}$ bis 1-prozentigen Genauigkeit ansehen. Dieser Befund stimmt auch gut mit den Experimenten von Zeleny und Mc Keehan²⁾ an in Luft fallenden Kügelchen überein. (Nur die Versuche an natürlichen Sporen machen eine Ausnahme, vgl. weiter unten § 10.)

Zur Orientierung über die in Betracht kommenden Größenordnungen geben wir zwei Beispiele von „kritischen Radien“ an: Für Kugeln vom spezifischen Gewicht 2 in Wasser wird \bar{a} etwa gleich 0,011 cm; für Kugeln vom spezifischen Gewicht 1 in Luft 0,0048 cm. Wir werden so auf die bekannte Tatsache geführt, daß wir kein Recht haben, die Stokessche Formel auf gewöhnliche Regentropfen anzuwenden, wohl aber auf genügend kleine Nebeltröpfchen, wie sie z. B. in den klassischen Experimenten zur Bestimmung der elektrischen Elementarladung von J. J. Thomson und H. A. Wilson gebraucht wurden.

1) H. D. Arnold, Phil. Mag. 22. S. 755. 1911.

2) J. Zeleny u. L. W. Mc Keehan, Phys. Zeitschr. 11. S. 78. 1911.

§ 7. Die theoretischen Untersuchungen von Oseen.

a) Um zu der Bedingung (12) zu gelangen, haben wir einfach das Verhältnis der Größenordnungen von (10) und (11) in der Umgebung der Kugel gebildet. Für beliebige r ist aber dieses Verhältnis gleich $\sigma r V / \mu$ und wächst mit r ins Unendliche, wie klein auch die Geschwindigkeit V sein mag. Von dieser Bemerkung ging Oseen¹⁾ aus in einer Arbeit, die er selbst folgendermaßen zusammenfaßt: „Bei der von Stokes gegebenen Ableitung der sogenannten Stokesschen Formel werden Glieder vernachlässigt, welche in großer Entfernung von der Kugel ausschlaggebend sind. Durch diesen Umstand wird es bedingt, daß der von Herrn Whitehead²⁾ gemachte Versuch, die von Stokes gegebenen Formeln für die durch die Translation der Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit durch Berücksichtigung der quadratischen Glieder zu verbessern, scheitern mußte. Um dem genannten Übelstand abzuweichen, muß man auch in erster Annäherung in den Navierschen Differentialgleichungen gewisse mit dem Faktor V behaftete Glieder beibehalten. Zu dem so erhaltenen linearen Systeme wurden die verallgemeinerten Greenschen Formeln aufgestellt. Mittels der so gewonnenen Hilfsmittel wurde die durch die genügend langsame Translation einer Kugel hervorgerufene Bewegung einer Flüssigkeit untersucht. Diese Bewegung weicht in hinreichender Entfernung von der Kugel selbst bei den kleinsten Werten von V beträchtlich von der Stokesschen Bewegung ab. Die Stokessche Formel für den Widerstand gegen die Bewegung der Kugel erleidet dadurch keinen Eintrag in ihrer Gültigkeit.“

Die Arbeit von Oseen wurde von Lamb³⁾ in eleganter Weise kommentiert; gleichzeitig gab auch Lamb eine viel einfachere Ableitung der Oseenschen Formeln. Die veränderte Berechnungsmethode von Oseen besteht nach Lamb in einer *teilweisen* Berücksichtigung der Wirkung der Trägheit der Flüssigkeit. Dadurch fällt der errechnete Bewegungszustand in bezug auf die Äquatorebene ($x = 0$) nicht mehr symmetrisch aus; in größeren Entfernungen von der Kugel

1) C. W. Oseen, Arkiv för Mat. Astr. och Fysik 6. Nr. 29. 1910; 7. Nr. 9—12. 1911.

2) J. B. Whitehead, Quart. Journ. of Math. 23. S. 78. 1888.

3) H. Lamb, Phil. Mag. 21. S. 112. 1911.

weicht er beträchtlich von demjenigen der Stokesschen Theorie ab, geht aber in der Umgebung der Kugel in diesen über und ergibt deshalb dieselbe Formel für den Widerstandskoeffizienten. Aus diesem Grunde kommt der Oseenschen Untersuchung nur rein theoretisches Interesse zu, um so mehr als auch die korrigierten Ausdrücke für die Strömungskomponenten (die nebenbei bemerkt viel komplizierter als die Stokesschen sind) physikalisch keinen merklichen Fortschritt bedeuten: Es ist zwar richtig, daß mit zunehmender Entfernung von der Kugel die bei der Stokesschen Lösung vernachlässigten Trägheitsglieder groß im Vergleich zu den beibehaltenen Reibungsgliedern werden, aber während das Verhältnis der Trägheitsglieder zu den Reibungsgliedern wie die erste Potenz des Radiusvektors mit diesem ins Unendliche wächst, verschwinden diese Glieder selbst wie $1/r^2$ bzw. $1/r^3$. Die Oseensche Korrektur bezieht sich also auf Gebiete, wo die Strömung (oder die Abweichungen von der ungestörten Parallelströmung beim Problem der „ruhenden Kugel in Parallelströmung“) sowieso wegen ihrer Kleinheit physikalisch nicht mehr in Betracht kommt. Immerhin ist es beruhigend, zu erfahren, daß für genügend kleine Geschwindigkeiten die Stokessche Theorie den ganzen Strömungsverlauf, soweit dieser überhaupt noch merklich ist, richtig wiedergibt, unbeachtet der Tatsache, daß diese Theorie auf Annahmen fußt, die für sehr große Entfernungen von der Kugel sicher nicht erfüllt sind.

Was den Zusammenhang der Oseenschen Theorie mit der Lorentzschen Methode der Berechnung des Einflusses fester Wände betrifft, vergleiche man den Schluß des folgenden Paragraphen.

b) Außer dem obenerwähnten Versuche von Whitehead, der, wie Oseen gezeigt hat, an der Unzulänglichkeit der Stokesschen Lösung für sehr große Entfernungen von der Kugel scheiterte, wurde dieselbe Aufgabe auch von Noether¹⁾ in Angriff genommen. Da der betrachtete Vorgang der gleichmäßigen Translation einer Kugel in einem zähen Medium, wie bereits besprochen, wesentlich nur von dem Werte der Reynoldsschen Zahl $R = a \sigma V / \mu$ abhängt, und da die

1) F. Noether, Zeitschr. für Math. u. Phys. 62. S. 1. 1913.

Stokessche Formel den Grenzfall der allgemein gültigen Widerstandsformel für verschwindende Reynoldssche Zahlen darstellt, so können wir für die durch Berücksichtigung der „Trägheitsglieder“ korrigierte Stokessche Formel die folgende Reihenentwicklung nach steigenden Potenzen von R

$$(16) \quad W = 6\pi a (1 + A_1 R + A_2 R^2 + \dots)$$

ansetzen; in den Untersuchungen von Whitehead, Noether und einer neueren Arbeit von Oseen¹⁾ handelte es sich im wesentlichen um die Berechnung des Koeffizienten A_1 .

Noether gibt zuerst eine Abänderung der Stokesschen Problemstellung, mittels welcher man auch die von Oseen, vermerkte Schwierigkeit umgehen kann, ohne die Gleichung (2) für „langsame“ Bewegung aufgeben zu müssen. Dazu braucht man nur an Stelle der „ruhenden Kugel in Parallelströmung“ eine Strömung zu betrachten, die durch eine in großer Entfernung von der Kugel sich befindende Quelle und eine auf der entgegengesetzten Seite in gleicher Entfernung sich befindende Senke hervorgerufen wird; in der Nähe der Kugel fällt diese Strömung mit der Stokesschen praktisch zusammen, vorausgesetzt natürlich, daß die Entfernung der Quellen hinreichend groß gegenüber dem Kugelradius ist. Leider können die weiteren Ausführungen von Noether, wie Oseen¹⁾ in einer besonderen Abhandlung gezeigt hat, nicht mehr als einwandfrei bezeichnet werden, was um so mehr zu bedauern ist, als sie zu sehr anschaulichen und recht plausiblen Schlüssen führen und in mancher Beziehung mit experimentellen Ergebnissen in besserer Übereinstimmung zu stehen scheinen, wie die entsprechenden korrigierten Ausdrücke von Oseen.

So findet Noether, daß „die Stokessche Formel Gültigkeit hat, bis auf Zusatzglieder, deren Verhältnis zum ursprünglichen quadratisch in der Reynoldsschen Zahl $R = a\sigma V/\mu$ ist“, während Oseen für den Koeffizienten A_1 nicht den Wert Null, wie Noether, sondern $\frac{3}{8}$ ausrechnet; das führt zu dem Näherungsausdrucke

$$(17) \quad W = 6\pi a \mu \left(1 + \frac{3}{8} \frac{a\sigma V}{\mu} \right)$$

1) C. W. Oseen, Arkiv usw. 9, Nr. 16. 1913.

für die korrigierte Stokessche Formel. Dieser steht aber im offensichtlichen Widerspruch mit den Versuchen von Arnold (vgl. oben § 6), indem der experimentell ermittelte Gültigkeitsbereich der ursprünglichen Stokesschen Formel sich merklich größer erweist als der aus (17) folgende. Um die Arnoldschen Resultate bequem mit (17) vergleichen zu können, macht man am besten von dem bereits eingeführten „kritischen Radius“ Gebrauch, wodurch (17) folgende Gestalt annimmt:

$$(17') \quad W = 6 a \pi \mu \left(1 + \frac{3}{8} \frac{a^2}{\bar{a}^2} \right).$$

Der direkte Vergleich mit den von Arnold angegebenen Kurven fällt ganz zuungunsten dieses Ausdrucks aus. Bereits bei $a = 0,3 \bar{a}$ verlangt die Oseensche Formel (17') eine einprozentige Korrektion des Stokesschen Gesetzes; die Genauigkeit der Arnoldschen Messungen betrug aber etwa $\frac{1}{2}$ Proz. und es müßten also nach (17') für alle Kugeln von größerem Radius wie $0,3 \bar{a}$ mit Sicherheit feststellbare Abweichungen vom Stokesschen Gesetz auftreten, was, wie bereits erwähnt [vgl. Ungleichung (15')] keineswegs der Fall war. Erst bei Kugelradien, die $0,6-0,7$ des kritischen Radius betrugen, traten die ersten Anzeichen des Versagens des Stokesschen Gesetzes auf; für $a/\bar{a} = 0,6$ beträgt aber das Korrektionsglied in (17') nicht weniger als 8% des ursprünglichen Wertes. Auch in den Messungen von Zeleny und Mc Keehan¹⁾ an fallenden Wachskügelchen in Luft, deren Genauigkeit den Arnoldschen Messungen etwas nachsteht, kam die Oseensche Korrektion gar nicht zum Vorschein.

Die Versuche von Arnold wurden in zylindrischen Gefäßen ausgeführt, und der Einfluß der Gefäßwände wurde mit Hilfe der Lorentz-Ladenburgschen Korrektionsformel [vgl. § 8, Gleichung (10)] ermittelt. Die Richtigkeit dieser Korrektion wurde von Ladenburg²⁾ selbst für $a/r = 0,01-0,09$ (a = Kugelradius, r = Zylinderradius) und von Arnold bis $0,1$ bestätigt. Für Kugeln, deren Durchmesser ein Zehntel des Zylinderdurchmessers überstieg, beobachtete zwar Arnold eine Abnahme der Fallgeschwindigkeit, die größer war, als

1) J. Zeleny und L. W. Mc Keehan, a. a. O.

2) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 22. S. 287. 1907; 23. S. 447. 1907.

die aus der Ladenburgschen Korrektonsformel folgende; durch Vergleich der Fallgeschwindigkeiten in verschiedenen weiten Röhren lassen sich jedoch — Näheres in der Originalabhandlung von Arnold — die Abweichungen infolge des Versagens der Ladenburgschen Korrektion und infolge des Hineinspielens der Trägheit der Flüssigkeit ziemlich sicher voneinander unterscheiden, und es scheint, daß man auf diesem Wege zu keiner brauchbaren Erklärung der Unstimmigkeit der Formel (17) mit der Erfahrung gelangen kann. Auch die folgende Bemerkung kann das nicht tun. Der Ausdruck (17) wurde streng genommen nur für eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit abgeleitet, und da die Trägheit der Flüssigkeit den Bewegungszustand hauptsächlich in größeren Entfernungen von der Kugel beeinflußt (vgl. § 7, am Anfang), so wäre es denkbar, daß die Vergrößerung des Widerstandskoeffizienten durch die Trägheit bei Anwesenheit fester Wände kleiner wird als bei einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, und daß es deshalb nicht erlaubt ist, die Abweichungen vom Stokesschen Gesetz einfach als Summe der Korrektionen (17) und (20) zu berechnen. Doch kann man auf den von Arnold angegebenen Kurven auch Punkte aufsuchen, wo die beobachtete Abweichung vom Stokesschen Gesetz auch ohne Anbringen der Ladenburgschen Korrektion unterhalb des von (17) geforderten Wertes liegt; beim Festhalten an der Formel (17) würde dieses Resultat auf eine Verkleinerung des Widerstandes durch die Einführung der Wände hinweisen, was wohl gänzlich ausgeschlossen erscheint.

Wir haben uns bei dieser Frage etwas länger aufgehalten, weil es sich hier um die einzige Unstimmigkeit zwischen Theorie und Experiment handelt, die uns im Laufe der vorliegenden Besprechung aufgestoßen ist, und die durch Berufung auf anderweitig bekannte Tatsachen nicht beseitigt werden konnte. Es will fast scheinen, als ob in den langwierigen und etwas unübersichtlichen Rechnungen von Oseen irgendein Versehen untergelaufen wäre, und als ob der Koeffizient der linearen Glieder in (16) sich dennoch als Null herausstellen sollte, wie in der unkorrigierten Arbeit von Noether. Vielleicht ließe sich die einfache und anschauliche Rechnungsmethode von Noether derart vervollkommen, daß man sie dadurch von dem von Oseen erhobenen Einwand freimachen kann?

Die weitere theoretische und experimentelle Verfolgung dieser Kontroverse wäre jedenfalls von Interesse.

§ 8. Einfluß der Gefäßwände.

Die Voraussetzung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit stellt selbstverständlich nur einen Grenzfall dar, der bei experimentellen Prüfungen des Stokesschen Gesetzes nie streng erfüllt sein kann. Es erwächst nun der Theorie die Aufgabe, den Einfluß verschieden gestalteter Gefäßwände, mindestens näherungsweise zu berechnen; was leider bis jetzt, trotz des allgemeinen dazu von Lorentz (vgl. unten) angegebenen Näherungsverfahrens, nur in zwei Spezialfällen gelungen ist. Das experimentell so wichtige Problem der Beeinflussung der langsamen Bewegung von Kugeln durch *zwei* parallele, ebene Wände ist theoretisch noch nicht gelöst worden. Jedenfalls genügt aber der eine der ausgerechneten Spezialfälle — die Bewegung längs der Achse eines Kreiszylinders —, um das Stokessche Gesetz einer experimentellen Prüfung unterziehen zu können, und der zweite — die Beeinflussung der Bewegung durch *eine* ebene Wand — kann mindestens dazu verwendet werden, um den Einfluß der Gefäßwände abzuschätzen und in manchen Fällen als vernachlässigbar zu erkennen.

Die eben erwähnte Lorentzsche Methode¹⁾ besteht in einer schrittweisen Lösung des betrachteten Problems durch Superposition von Bewegungszuständen, die zwar jedesmal die Gleichungen (2) für die „langsame“ Bewegung einer zähen Flüssigkeit streng erfüllen, die gegebenen Randwertbedingungen aber nur teilweise befriedigen. Die sukzessive Bestimmung der Strömung, die durch eine gleichförmige Translation einer Kugel in einer von festen Wänden eingeschlossenen Flüssigkeit hervorgerufen wird, stellt sich etwa folgendermaßen dar: Als erste Näherung nimmt man die aus der Stokesschen Theorie bekannte Strömung einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit um eine sich translatorisch bewegendes Kugel. Die zweite Näherung ergibt sich durch Superposition der ersten mit der „reflektierten“ Strömung. Diese unterliegt der Randwertbedingung, daß die Geschwindigkeiten an der von den festen Wänden eingenommenen Fläche entgegengesetzt gleich den-

1) A. H. Lorentz, a. a. O.

jenigen des ersten Bewegungszustandes sein sollen. Im übrigen ist die „reflektierte“ Strömung wiederum so berechnet, als ob die Kugel nicht da wäre und die Flüssigkeit sich bis ins Unendliche erstrecken würde. Die Berechtigung dieser Superposition ist durch die Linearität der zugrunde gelegten Gleichungen (2) bedingt. Wir sehen, daß die „reflektierte“ Strömung derart gewählt ist, daß sie die „direkte“ an der Wandoberfläche gerade aufhebt, wodurch die Randwertbedingungen an dieser Fläche erfüllt werden ($u = v = w = 0$, da die Gleitung gleich Null vorausgesetzt wird); an der Oberfläche der beweglichen Kugel ist das aber keineswegs der Fall, denn dort erfüllt bereits die „direkte“ Strömung für sich die Randwertbedingungen unseres Problems ($u = V$, $v = w = 0$) und die hinzukommenden Geschwindigkeitskomponenten der „reflektierten“ Strömung sind dort im allgemeinen von Null verschieden. Das eben geschilderte Näherungsverfahren kann aber weiter fortgesetzt werden; als dritte Näherung haben wir die Superposition der zweiten mit der von der Kugel „reflektierten“ Strömung zu nehmen, dann wiederum die „Zurückwerfung“ von der festen Wand usw.

Die Aufgabe wird wesentlich erleichtert, wenn die Kugel als unendlich klein angesehen werden darf. Dann sind auch die Geschwindigkeiten, die diese Kugel in endlicher Entfernung hervorruft, unendlich klein und ebenso alle die Geschwindigkeiten, welche die „reflektierte“ Strömung ausmachen. Es genügt dann, bereits bei der zweiten Näherung stehen zu bleiben. Wie die Geschwindigkeiten, so setzt sich auch der Widerstand, den die Kugel erleidet, additiv aus demjenigen der direkten (Widerstand $= 6\pi\mu a V$) und der reflektierten Strömung (Widerstand $= 6\pi\mu a V_1$) zusammen. Wir brauchen nur die Geschwindigkeit V_1 der reflektierten Strömung am Orte des Mittelpunktes der Kugel zu berechnen; da wir diese Strömung in der unmittelbaren Umgebung der unendlich kleinen Kugel als Parallelströmung auffassen können, berechnen wir die Kraft, die die „reflektierte“ Strömung auf unsere Kugel ausübt, mit Hilfe der gewöhnlichen Stokes'schen Formel zu $6\pi\mu a V_1$ und daraus den gesuchten Widerstandskoeffizienten zu $6\pi\mu a (1 + V_1/V)$. In der letzten Überlegung haben wir stillschweigend angenommen, daß die Richtung der Geschwindigkeit der „reflektierten“ Bewegung

mit der Richtung der ursprünglichen Bewegung zusammenfällt. Im allgemeinen, d. h. bei beliebig gestalteten Wänden, braucht das aber keineswegs der Fall zu sein. Wir müssen dann in der eben hingeschriebenen Formel V_1 durch die Komponente der „Zusatzgeschwindigkeit“ in der Richtung der ursprünglichen Geschwindigkeit ersetzen und außerdem die Entstehung einer, durch die Anwesenheit der Wände bedingten, der Geschwindigkeit proportionalen, transversalen Kraft auf die Kugel in Betracht ziehen. Bewegt sich eine Kugel im Abstände d von einer ebenen Wand parallel zu derselben, so ist eine solche Kraft, wie Stock¹⁾ nachgewiesen hat, sogar bei Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung in a/d nicht vorhanden; die Kugel wird infolge ihrer Bewegung von der Wand weder angezogen noch abgestoßen, ebensowenig erleidet sie einen Drehimpuls.

Die Anwendung der Lorentzschen Methode auf konkrete Probleme stößt aber gewöhnlich auf große rechnerische Schwierigkeiten, denn die Bestimmung der „reflektierten“ Bewegung erfordert die Berechnung eines Integrals der Differentialgleichungen (2) mit vorgegebenen Geschwindigkeitskomponenten an einer vorgegebenen Fläche, eine Aufgabe, für deren Behandlung zwar allgemeine Methoden vorhanden sind (vgl. § 2), wogegen aber die explizite Durchführung der Rechnung nur in einigen speziell einfachen Fällen bekannt ist. Für eine Kugel ist die Lösung als Entwicklung in eine Reihe von räumlichen Kugelfunktionen von Oberbeck und Lamb²⁾ gegeben worden; ebenso läßt sie sich für einen unendlich langen Kreiszylinder mit Hilfe der Besselschen Funktionen behandeln.³⁾ Für eine unendlich ausgedehnte Ebene hat Lorentz⁴⁾ einen Kunstgriff angegeben, wie man direkt aus einer beliebigen „direkten“ Strömung die zugehörige „reflektierte“ ausrechnen kann.

Das Lorentzsche Annäherungsverfahren ist also nur dann anwendbar, wenn die explizite Berechnung der „reflektierten“ Strömung, sowohl von dem bewegten Körper (der Kugel), als auch von den festen Wänden möglich ist. Das

1) J. Stock, Anz. Ak. Krakau, S. 18, 1911.

2) Vgl. H. Lamb, Lehrb. d. Hydrodynamik, §§ 323—325, 335—336.

3) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 28. S. 447. 1907.

4) H. A. Lorentz, a. a. O.

ist z. B. nach dem oben Gesagten für das bereits mehrfach erwähnte Problem der Bewegung einer Kugel in einer von einer festen, ebenen Wand begrenzten, zähen Flüssigkeit der Fall, wo die Berechnung der „Zurückwerfung“ von der Wand mit Hilfe des Lorentzschen Kunstgriffes und die „Zurückwerfung“ von der Kugel mit Hilfe der von Lamb angegebenen Reihenentwicklung ausgeführt werden kann. Lorentz fand derart für den Widerstandskoeffizienten einer Kugel, die sich senkrecht zu einer ebenen Wand in der Entfernung d von derselben bewegt :

$$(18) \quad W = 6\pi\mu a \left(1 + \frac{9}{8} \frac{a}{d}\right)$$

und analog für parallele Bewegung

$$(19) \quad W = 6\pi\mu a \left(1 + \frac{9}{16} \frac{a}{d}\right).$$

Stock¹⁾ setzte im Falle der Parallelbewegung diese Berechnung bis zu den Gliedern vierter Ordnung in a/d fort, und erhielt

$$(19') \quad W = 6\pi\mu a \left\{ \frac{1}{1 - \frac{9}{16} \frac{a}{d}} - \left(\frac{a}{2d}\right)^3 \left(1 + \frac{9}{16} \frac{a}{d}\right) \right\}.$$

Mit Beibehaltung der quadratischen Glieder in a/d können wir also sagen, daß die Anwesenheit einer ebenen, zur Translationsrichtung der Kugel parallelen Wand den Widerstandskoeffizienten in der Stokesschen Formel im Verhältnis 1 zu $1 - \frac{9}{16} \frac{a}{d}$ vergrößert.

Ebenso sind nach dem oben Gesagten alle „Zurückwerfungen“ bei der analogen Behandlung des Problems der Bewegung einer Kugel längs der Achse eines Kreiszylinders (vom Radius r) explizite berechenbar. Ladenburg²⁾ findet für den Widerstandskoeffizienten in diesem Falle

$$(20) \quad W = 6\pi\mu a \left(1 + 2,4 \frac{a}{r}\right).$$

Die Ergänzung dieser Formel durch Berücksichtigung der quadratischen Glieder in a/r , die nach dem oben Gesagten eine bloße Rechenarbeit darstellt, wäre aus mehreren Gründen erwünscht. Arnold³⁾ beobachtete bei seinen

1) J. Stock, a. a. O.

2) R. Ladenburg, a. a. O.

3) H. D. Arnold, a. a. O.

Experimenten an fallenden Metallkugeln in ölgefüllten Zylindergefäßen Abweichungen von der Ladenburgschen Korrektionsformel, die sicherlich durch die Vernachlässigung der quadratischen Glieder in (20) zu erklären sind. Auch würde man durch diese Fortsetzung der Reihenentwicklung (20) instand gesetzt, die experimentell gefundenen Abweichungen vom Stokesschen Gesetz infolge des Überschreitens des Bereiches der „langsamen“ Bewegung besser von denjenigen, die bei sehr engen Gefäßen hervortreten, auseinander zu halten, was für die am Schlusse des vorigen Paragraphen durchgeführte Diskussion von Belang ist.

Auf viel größere Schwierigkeiten stößt man bei der theoretischen Behandlung des Problems der langsamen Bewegung einer Kugel in einer zähen Flüssigkeit, die von *zwei* festen, ebenen Wänden eingeschlossen ist. Eine direkte Berechnung der „Zurückwerfung“ von den beiden Ebenen zusammen ist hier nicht bekannt, der Lorentzsche Kunstgriff, der nur die Geschwindigkeitskomponenten an einer Ebene auf einmal aufzuheben gestattet, ist nicht anwendbar. Ladenburg¹⁾ hat versucht, durch wiederholte Anwendung dieses Kunstgriffes zum Ziele zu kommen, doch auch dieses Verfahren scheint für die Lösung dieses Problems nicht sehr geeignet zu sein. Denn die Brauchbarkeit der Lorentzschen Methode hängt wesentlich mit der Kleinheit der Kugel im Verhältnis zu ihrer Entfernung von den Wänden zusammen, welche Kleinheit das schnelle Abnehmen jeder darauffolgenden „Zurückwerfung“ im Vergleich mit der vorangehenden gewährleistet. Aber wenn wir die von einer unendlich ausgedehnten Ebene „reflektierte“ Strömung an der entgegengesetzten, ebenfalls unendlich ausgedehnten Ebene „reflektieren“, so ist kein Grund vorhanden, warum die zweite „Zurückwerfung“ aus wesentlich kleineren Geschwindigkeiten bestehen sollte als die erste. In der Tat nehmen die abwechselnd positiven und negativen Glieder, die Ladenburg für den Widerstandskoeffizienten erhält, der absoluten Größe nach nur sehr langsam ab. Wenn wir auch so viele dieser „Zurückwerfungen“ bestimmt hätten, daß alle weiteren bereits mit Recht vernachlässigt werden könnten, so hätte doch die

1) R. Ladenburg, a. a. O.

Superposition aller berechneter „Zurückwerfungen“ erst das ergeben, was wir in der allgemeineren Beschreibung der Lorentz'schen Methode als „erste reflektierte Strömung“ bezeichnet haben: eine Strömung, die zu der gewöhnlichen Stokesschen Strömung addiert, deren Geschwindigkeitskomponenten an beiden Ebenen zusammen gerade aufhebt. Dann käme erst die Berechnung der „zweiten Näherung“ (quadratische Glieder in a/d) an die Reihe usw.

Das eben Gesagte soll aber keineswegs einen Einwand gegen die Landenburgsche Arbeit sein, denn bei seinen Versuchen war diese Korrektur vernachlässigbar klein, da sie nur notwendig war, um die Anwesenheit der beiden Deckel seiner zylindrischen Gefäße zu berücksichtigen (a/l etwa gleich 0,005). Es soll nur davor gewarnt werden, die von Landenburg angegebene Korrektionsformel [vgl. (6')]

$$(20') \quad V = \frac{2g a^2 (\sigma' - \sigma)}{9\mu \left(1 + 2,4 \frac{a}{r}\right) \left(1 + 3,3 \frac{a}{2l}\right)}$$

(1 = halbe Entfernung zwischen den beiden parallelen, ebenen Deckeln) falsch zu interpretieren: Der erste Klammerausdruck im Nenner trägt der Vergrößerung des Widerstandes durch die Zylinderwand Rechnung, und stellt das nach der Lorentz'schen Methode berechnete erste Glied einer Entwicklung nach aufsteigenden Potenzen von a/r dar. Der zweite Klammerausdruck hat aber eine davon ziemlich verschiedene Bedeutung; denn erstens ist die Beeinflussung der Bewegung der fallenden Kugel durch die beiden Deckel mit dem Verhältnis der Entfernungen der Kugel von diesen Deckeln veränderlich und der Koeffizient 3,3 stellt einen Mittelwert für die in den Experimenten von Landenburg in Betracht kommenden Entfernungen (etwa 1:9 bis 9:1) dar und zweitens ist nach dem oben Gesagten die ganze Berechnung dieses Korrektionsfaktors bei weitem nicht so einwandfrei, wie die des vorigen.

Die Beeinflussung der Bewegung von Teilchen durch zwei parallele Ebenen (Objektträger und Deckgläschen) spielt eine so wichtige Rolle bei verschiedenen experimentellen Untersuchungen, daß es jedenfalls der Mühe wert wäre, dieses Problem auf die eine oder andere Weise theoretisch zu lösen. Man kann ferner versuchen, eine empirische Formel dafür

aufzustellen, was auch von Westgren¹⁾ gemacht worden ist. Seine Experimente, die nach einer äußerst eleganten Methode ausgeführt wurden, bezeichnet er aber selbst als nur vorläufige Orientierung und ihre Genauigkeit dürfte etwa 10 Proz. nicht übersteigen (Störungen infolge Konvektionsströmungen, Zeitmessung mit einer gewöhnlichen Stoppuhr usw.). Für den Widerstandskoeffizienten in der Mitte zwischen den beiden Platten stellte Westgren die folgende empirische Formel auf

$$(21) \quad W = 6\pi\mu a \left(1 + 3,3 \frac{a^2}{l^2}\right),$$

worin l die halbe Entfernung der beiden Platten bedeutet. Es fällt hier das Fehlen des linearen Gliedes in a/l auf; man hätte eher in Analogie mit der entsprechenden Formel (19) eine Reihenentwicklung

$$(21') \quad W = 6\pi\mu a \left(1 + A_1 \frac{a}{l} + A_2 \frac{a^2}{l^2} + \dots\right)$$

erwartet, mit einem von Null verschiedenen Koeffizienten A_1 . [Es handelt sich übrigens wohlgerne um den Widerstandskoeffizienten in der Mitte zwischen den beiden Platten; im allgemeinen Falle müßte eine entsprechend kompliziertere Reihenentwicklung an Stelle von (21') treten.] Man kann sogar in Anlehnung an die Lorentzsche Methode von vornherein etwas über die Größe des Koeffizienten A_1 aussagen: Er muß zwischen dem Werte $9/16$, der für eine Platte gilt und dem Doppelten dieses Wertes liegen, denn die von jeder Platte „reflektierte“ Strömung wird jedenfalls durch die Einführung der anderen Platte (auf welcher sie verschwinden muß) derart in ihrer Ausbildung gestört, daß sie eine kleinere Geschwindigkeit am Orte des Mittelpunktes der Kugel besitzen wird. Eine nähere Betrachtung der Westgrenschen Resultate zeigt auch, daß sie der Formel (21') zum mindesten nicht widersprechen. Die von Westgren gemessenen Fallzeiten für gleichgroße Fallstrecken seien mit z bezeichnet, dann sind die Werte von $a^2 z$ [vgl. Formel (6')] den Widerstandskoeffizienten offenbar proportional; wenn wir $a^2 z$ als Funktion von a/l aufzeichnen, so können wir uns davon leicht überzeugen, daß die Tangente keineswegs die Tendenz hat, für verschwindende Radien der a -Achse parallel zu werden, wie es die Formel (21) verlangen

1) A. Westgren, Ann. d. Phys. 52. S. 308. 1917.

würde. Eine sichere Entscheidung kann nach den vorliegenden Messungen nicht getroffen werden, weil die experimentellen Kurven zu weit von der a^2z -Achse weg abbrechen (zu wenig Messungen für kleine a/l); eine Berechnung der Schnittpunkte mit der a^2z -Achse nach dem gewöhnlichen Stokesschen Gesetz, welches an dieser Achse gelten muß, mit Berücksichtigung der anderweitig bestimmten Werte für die Dichte der Teilchen und die innere Reibung der Fallflüssigkeit (Wasser) führt ebenso zu ganz ungeeigneten Resultaten; offenbar ist die Dichte der Gummigutt- und Mastixeteilchen wegen der zufälligen Veränderlichkeit von Teilchen zu Teilchen nicht genau genug bestimmbar. Eine rohe Schätzung des Koeffizienten A_1 kann folgendermaßen erhalten werden: Wir berücksichtigen nur die Punkte, für welche a/l kleiner als 0,2 ist, was etwa für die Hälfte aller Messungen der Fall ist; a^2/l^2 ist dann kleiner als 0,04 und da A_2 etwa gleich 3 ist, so übersteigt dann das quadratische Glied in (21') kaum die Genauigkeit der Messungen; die berücksichtigten Teile der Kurven approximieren wir nun durch Gerade, und aus der Neigung dieser Geraden gegen die a/l -Achse erhalten wir bei den Gummigutteilchen die folgenden Werte für A_1 : 1,46, 1,50, 1,04, 1,20, 0,84, die gerade von der vermuteten Größe, $\frac{9}{16}-\frac{9}{8}$, sind. Man könnte auch den Einwand machen, daß, wenn A_1 nicht gleich Null wäre, auch die Kurven in der Westgrenschen Figur 6 (a^2z als Funktion von a^2/l^2) keine Geraden sein würden; doch lassen sich die Abweichungen in der Figur deshalb gar nicht bemerken, weil alle Punkte mit kleinen a , infolge der gewählten Auftragsart, in die unmittelbare Nähe der a^2z -Achse zusammengedrängt sind. Die weitere experimentelle Untersuchung dieser Frage wäre sehr erwünscht. Jedenfalls ist es interessant, zu wissen, daß man in einem ziemlich großen Bereich von a/l (0,05—0,7) den Widerstandskoeffizienten einer Kugel, die sich in der Mitte zwischen zwei planparallele Platten, parallel zu diesen bewegt, durch die Formel (21) darstellen kann; doch muß man sich daran erinnern, daß diese Formel nur auf eine 5—10 prozentige Genauigkeit Anspruch erhebt und man darf sich jedenfalls nicht durch sie verleiten lassen, die Abweichungen vom Stokesschen Gesetz für kleine Werte von a/l zu unterschätzen. Für Radien, die kleiner sind als etwa ein Zehntel der halben Entfernung der

beiden Platten, wird es deshalb angezeigt sein, sich zu Orientierungszwecken etwa der Formel

$$(21'') \quad W = 6\pi\mu a \left(1 + \frac{a}{l}\right)$$

zu bedienen.

Eine weitere Anwendung der Lorentzschen Methode finden wir in einer Arbeit von Smoluchowski¹⁾, wo die gegenseitige Beeinflussung zweier fallenden Kugeln untersucht wird. Die Berechnung einer jeden der aufeinanderfolgenden „reflektierten“ Strömungen ist hier durch die oft erwähnte Lambsche Reihenentwicklung nach räumlichen Kugelfunktionen ermöglicht, und falls beide Kugeln in Bewegung sind, so findet man die mechanischen Wirkungen durch Superposition der Kräfte in den beiden Spezialfällen, in welchen je nur eine Kugel in Bewegung und die andere in Ruhe ist.

Für den Fall, wo beide Kugeln (gleiche Radien a) sich parallel zueinander mit der gleichen Geschwindigkeit V bewegen, findet Smoluchowski die folgenden Resultate: 1. Es wirken auf beide Kugeln gleiche und *gleichgerichtete* Kräfte. 2. Eine Komponente in der Bewegungsrichtung verkleinert den Widerstand um

$$\frac{9}{2} \frac{a^2 \pi \mu}{r} V \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r}\right).$$

Hierin bedeutet r den gegenseitigen Abstand der beiden Kugelmittelpunkte. 3. Die andere Komponente längs der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte, und zwar in der Richtung von der zurückgelegenen zur voranschreitenden Kugel, hat die Größe:

$$\frac{9}{2} \frac{a^2 \pi \mu}{r} V \cos \Theta \left(1 - \frac{9}{4} \frac{a}{r}\right).$$

Hierin bedeutet Θ den Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte. 4. Außerdem ergibt die Rechnung, daß die Kugeln von Drehmomenten beansprucht werden. In allen angegebenen Resultaten sind die Glieder bis zu der zweiten Ordnung in a/r berücksichtigt. Interessant ist der scheinbare Widerspruch mit dem Satze von Wirkung und Gegenwirkung, der sich

1) M. Smoluchowski, Anz. Ak. Krakau S. 28. 1911; Cambridge Intern. Math. Congress 1912.

aber sofort durch die Bemerkung aufklärt, daß zwischen den Kugeln keine inneren Kräfte wirken, sondern die Flüssigkeit mitberücksichtigt werden muß.

Es ergibt sich auch u. a. aus diesen Resultaten, daß zwei nebeneinander fallenden Kugeln nicht nur etwas schneller als nach dem Stokesschen Gesetz fallen, sondern auch, daß die Fallbahn der beiden Kugeln von der Vertikalen um einen kleinen Winkel ε nach der Verbindungslinie der Kugelmittelpunkte hin geneigt ist, wo

$$\sin \varepsilon = \frac{3}{4} \frac{a}{r} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} \right) \sin \Theta \cos \Theta.$$

Die eben erwähnten hydrodynamischen Sätze von Smoluchowski wurden von Oseen¹⁾ einer Kritik unterzogen, die sich ebenso auf alle mit der Lorentzschen Methode ausgeführten Rechnungen bezieht. Oseen geht wieder von der von ihm angegebenen modifizierten Lösung des Stokesschen Problems aus. Wie wir gesehen haben (§ 7a), bezog sich seine Korrektur nur auf größere Entfernungen von der Kugel, wo die von Stokes vernachlässigten Trägheitsglieder bereits über die Reibungsglieder hinauswachsen. Der Strömungszustand in der unmittelbaren Umgebung der Kugel war in beiden Theorien gleich und deshalb erhielt auch Oseen denselben Wert für den Widerstandskoeffizienten einer Kugel in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit, wie Stokes. Bei der Lorentzschen Methode muß man aber bei der Berechnung der „reflektierten“ Bewegung von den Werten der Strömungsgeschwindigkeiten in größeren Entfernungen von der Kugel Gebrauch machen und dabei könnte die Oseensche Korrektur von Belang werden. Aus dem von Oseen durchgerechneten Spezialfall der gegenseitigen Beeinflussung zweier fallenden Kugeln kann man die charakteristischen Merkmale für alle analogen Fälle übersehen, wo man die Rechnungen nach dem Lorentzschen Näherungsverfahren ausführt, mit dem einzigen Unterschiede, daß man die Oseensche Lösung des Stokesschen Problems an Stelle der ursprünglichen Stokesschen als Ausgangsströmung nimmt. Die Zusatzkräfte, die nach Oseen auf die Kugeln wirken, sind einander nicht mehr gleich, wie bei Smoluchowski; es entspricht

1) C. W. Oseen, Arkiv för Mat. Astr. och Fysik 7. Nr. 33. 1911.

das der Unsymmetrie der Oseenschen Strömung (§ 7a) vor und hinter der Kugel, einer Unsymmetrie, die, wie bereits erwähnt, durch die teilweise Berücksichtigung der Trägheit der Flüssigkeit zustande kommt. Die Oseenschen Formeln werden mit den Smoluchowskischen identisch, wenn $r\sigma V/2\mu$ gegen die Einheit vernachlässigt werden kann; im entgegengesetzten Falle wird der Widerstand nach den Oseenschen Formeln nicht mehr proportional der Geschwindigkeit, die Begriffe der Beweglichkeit und des Widerstandskoeffizienten verlieren ihre Bedeutung, und man kann das auch so ausdrücken, daß man dann außerhalb des Gültigkeitsbereiches der „langsamen“ Bewegung gelangt ist. Die Bedingung $\frac{r\sigma V}{2\mu} \ll 1$ hat dieselbe Form, wie die Bedingung (12) der „Langsamkeit“ der Bewegung, nur daß die gegenseitige Entfernung r der beiden Kugeln an die Stelle des Kugelradius a getreten ist. Da r viel größer als a ist (die Lorentzsche Methode besteht ja in einer Entwicklung nach Potenzen von a/r), so ist diese Bedingung viel einschränkender als (12); in den klassischen Kondensationsversuchen von J. J. Thomson und A. H. Wilson und den Untersuchungen von Perrin über Emulsionen war sie jedenfalls erfüllt. Wie Smoluchowski bemerkt hat, überschätzt Oseen in seiner Abhandlung die Tragweite seiner Korrektur, weil er durch ein Versehen den Faktor σ in $r\sigma V/2\mu$ weggelassen hat.

Die Lösung des Problems der gegenseitigen Beeinflussung zweier Kugeln setzt uns auch in den Stand, das Problem der gleichzeitigen Bewegung einer großen Anzahl von Kugeln, einer Wolke, in Angriff zu nehmen. Da diese Frage in letzter Zeit, seitdem man in der experimentellen Elektronik allgemein zu der Methode der Messung an Einzelpartikeln (Milikan-Ehrenhaft) übergegangen ist, sehr an Aktualität eingebüßt hat, verweisen wir in bezug auf nähere Einzelheiten auf die diesbezügliche Abhandlung von Smoluchowski¹⁾, wo auch ein früherer Lösungsversuch von Cunningham²⁾ kritisch besprochen wird.

Wir haben bereits am Anfang dieses Paragraphen darauf hingewiesen, daß die Ermittlung der Korrektionsformeln für

1) M. Smoluchowski, *Cambr. Intern. Math. Congress* 1912.

2) E. Cunningham, *Proc. Roy. Soc.* **83**, S. 357. 1910 (zweiter Teil).

den Einfluß der Wände die einwandfreie experimentelle Verifikation des Stokesschen Gesetzes erst ermöglicht hat. Es kommen hier hauptsächlich die ausgedehnten experimentellen Untersuchungen von Ladenburg¹⁾ und von Arnold²⁾ in Betracht. In diesen beiden Abhandlungen findet man auch eine kritische Zusammenstellung der früheren diesbezüglichen Arbeiten. Im großen und ganzen kann man aber aus diesen älteren Arbeiten nur wenig schließen, weil in ihnen der Einfluß der Gefäße, die „Langsamkeit“ der Bewegung, die Konstanz der Temperatur usw. meistens nicht genügend berücksichtigt wurden. Speziell die Konstanthaltung der Temperatur stellt große Anforderungen an die Geschicklichkeit des Experimentators, denn erstens ist der Koeffizient der inneren Reibung mit der Temperatur gewöhnlich ziemlich stark veränderlich, und zweitens, was noch wichtiger erscheint, bewirken bereits sehr kleine Temperaturdifferenzen Strömungen in der Flüssigkeit, die die ganzen Messungen illusorisch machen können. In den beiden letztgenannten Untersuchungen wurden alle nötigen Vorsichtsmaßregeln getroffen und eine Meßgenauigkeit von etwa $\frac{1}{2}$ Proz. erreicht. Die Messungen wurden in zylindrischen Gefäßen ausgeführt und die Korrektur für den Einfluß der Wände mittels der Ladenburgschen Korrektionsformel (20') berechnet. Sowohl das Stokessche Gesetz, wie auch diese Korrektionsformel selbst, fanden sich vorzüglich bestätigt. Dabei arbeitete Ladenburg mit Stahlkugeln von 0,1—0,2 cm Radius und einer sehr zähen Flüssigkeit (Lösung von Kolophonium in Terpentinöl, μ etwa gleich 1300, also rund 100000mal größer wie bei Wasser von 10° C), während Arnold mit verschiedenen Ölen von einer mehr als 1000mal kleineren Viskosität. ($\mu = 0,07—0,69$) experimentierte. Die Metallkugeln, die er gebrauchte, mußten entsprechend viel kleiner gewählt werden, um innerhalb des Bereiches der „langsamen“ Bewegung zu bleiben. Wie bereits besprochen, stellte auch Arnold experimentell die Grenzen dieses Bereiches fest [vgl. (15')].

Außer diesen beiden Arbeiten, die das Stokessche Gesetz für tropfbare Flüssigkeiten bestätigten, wurden auch neuer-

1) R. Ladenburg, a. a. O.

2) H. D. Arnold, a. a. O.

dings verschiedene Untersuchungen über das Fallen von Kugelteilchen in Gasen angestellt. Alle die im zweiten Teil zu besprechenden experimentellen Prüfungen der Stokes-Cunninghamschen Formel ergaben auch eine gute Bestätigung des gewöhnlichen Stokesschen Gesetzes für nicht zu niedrige Gasdrucke.

§ 9. Ungleichförmige Bewegung.

Ein längst bekanntes Beispiel einer ungleichförmigen Bewegung eines festen Körpers in einem zähen Medium ist das ebenfalls zuerst von Stokes¹⁾ gelöste Problem der kleinen Schwingungen einer Kugel in einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit. Wenn die Kugel kleine Pendelschwingungen von der Frequenz n (Periode $2\pi/n$) auf einer geraden Linie ausführt, so ist der Widerstand

$$(22) \quad 6\pi\mu a V + M \left\{ \frac{9n}{4as} V + \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{4as} \right) \frac{dV}{dt} \right\},$$

worin M die Masse der verdrängten Flüssigkeit ($\frac{4}{3}\pi a^3 \sigma$) bedeutet und $\sqrt{\frac{n\sigma}{2\mu}} = s$ gesetzt wurde. Der Widerstand bei der gleichförmigen Translation ergibt sich als Grenzfall von (22) für unendlich langsame Schwingungen ($n = 0$, $\frac{dV}{dt} = 0$). Andererseits wird für $\mu = 0$, $s = \infty$ und der Widerstand reduziert sich auf eine Kraft $\frac{1}{2} M \frac{dV}{dt}$, die proportional der Beschleunigung ist; es ist das das bekannte Resultat aus der Hydrodynamik der idealen (reibunglosen) Flüssigkeit, wo die „scheinbare Masse“ gleich der Hälfte der von der Kugel verdrängten Flüssigkeitsmasse ist.

Die Kenntnis der Lösung für die oszillierende Bewegung eines festen Körpers in einer zähen Flüssigkeit setzt uns in den Stand, auch das Problem einer beliebigen („langsamen“) Bewegung dieses Körpers in Angriff zu nehmen. Infolge der Linearität der Differentialgleichungen der Bewegung kann man hier eine ähnliche Anwendung des Fourierschen Integrals machen, wie sie bei der Lösung spezieller Probleme der Potentialtheorie seit langem üblich ist. In bezug auf nähere Einzelheiten verweisen wir auf eine Abhandlung von

1) G. G. Stokes, a. a. O.

Lord Rayleigh¹⁾, wo auch Literaturangaben über die früheren diesbezüglichen Arbeiten von Basset, Boussinesq u. a. zu finden sind.

Für den Widerstand, den eine Kugel bei geradliniger Bewegung in einer zähen Flüssigkeit erleidet, wenn ihre Geschwindigkeit $V(t)$ als Funktion der Zeit gegeben ist, findet man derart die folgende, höchst interessante Formel

$$(23) \quad -F = M \left\{ \frac{1}{2} \dot{V} + \frac{9\mu}{2\sigma a^2} V + \frac{9\sqrt{\mu}}{2a\sqrt{\pi\sigma}} \int_{-\infty}^t \frac{\dot{V}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right\}.$$

Das erste Glied [wie in (22)] die scheinbare Masse, wie sie auch bei verschwindender innerer Reibung vorhanden wäre, das zweite Glied ist gleich dem Widerstande bei gleichförmiger Translation, wie er durch die gewöhnliche Stokesche Formel gegeben wird und der letzte Ausdruck bringt den Einfluß der Vorgeschichte der Kugel zur Geltung; der Widerstand im Momente t hängt zwar nur von dem gleichzeitigen Strömungszustande der Flüssigkeit ab, aber der Strömungszustand selbst wird durch die frühere Bewegung der Kugel mitbestimmt.

Viel schwieriger wird das Problem, wenn nicht die Geschwindigkeit, sondern die Kräfte vorgegeben sind; für den Fall einer Kugel, die unter dem Einflusse der Schwerkraft fällt, wurde dieses Problem von Picciati²⁾ und von Boggio³⁾ gelöst. Die Aufgabe besteht im wesentlichen in der Auflösung einer integro-differentiellen Gleichung für $V(t)$, die man dadurch erhält, daß man den Ausdruck (23) für den Widerstand F in die Bewegungsgleichung der Kugel

$$(24) \quad M' \frac{dV}{dt} = (M' - M)g + F$$

einsetzt (M' = Masse der Kugel, M = Masse der verdrängten Flüssigkeit, wie früher). Boggio hat gezeigt, wie diese und ähnliche Gleichungen durch die Anwendung eines bekannten Theorems von Abel über die Inversion von Integralen gelöst werden können. Die Formeln für V und für den von der Kugel in einer gewissen Zeit zurückgelegten Weg, zu denen er in dem Falle, daß die Kugel und die Flüssigkeit ursprün-

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 697. 1911.

2) G. Picciati, Rend. Acc. Lincei 16. S. 45. 1907.

3) T. Boggio, Rend. Acc. Lincei 16. S. 613 u. 730. 1907.

lich in Ruhe waren, gelangt, sind verhältnismäßig einfach und eignen sich zur unmittelbaren numerischen Auswertung. Es ist auffallend, daß die analytische Form dieser Funktionen von dem Verhältnis σ'/σ der Dichtigkeiten der Kugel und der Flüssigkeit abhängt, und Basset hat sogar dieses Resultat als einen Einwand gegen die Anwendbarkeit der gewöhnlichen angenäherten Gleichungen für die Bewegung einer zähen Flüssigkeit [Differentialgleichungen (2) der „langsamen“ Bewegung] betrachtet. Diese Ansicht wird jedoch von Lord Rayleigh nicht geteilt: vergleiche seine eben erwähnte Arbeit, wo auch weitere höchst interessante Beispiele für die Anwendung der Methode von Boggio behandelt werden.¹⁾

In verschiedenen experimentellen Arbeiten kann es wünschenswert sein, zu erfahren, wie lange die Kugel dazu braucht, um vom Zustande der Ruhe eine mit einer gewissen Annäherung konstante Endgeschwindigkeit zu erreichen. Die Formeln von Boggio geben eine genaue Antwort auf diese Frage; eine ungefähre Orientierung kann aber auf einem viel einfacheren Wege erreicht werden. Wenn wir annehmen, daß der Widerstandskoeffizient auch bei beschleunigter Bewegung in jedem Moment durch das Stokes'sche Gesetz gegeben wird, so fällt in (23) das Glied mit dem Integral weg, die Bewegungsgleichung (24) wird zu einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(24) \quad (M' + \frac{1}{2} M) \frac{dV}{dt} = 6\pi\mu a V + (M' - M)g$$

und als partikuläre Lösung, die der Bedingung unterworfen ist, daß sie für $t=0$ verschwinden soll, erhalten wir

$$(25) \quad V = \frac{(M' - M)g}{6\pi\mu a} \left(1 - e^{-\frac{6\pi\mu a}{M' + \frac{1}{2} M} t} \right).$$

Wenn wir hier für die Masse der Kugel M' und für die Masse der verdrängten Flüssigkeit M ihre Werte $\frac{4}{3}\pi a^3 \sigma'$ bzw. $\frac{4}{3}\pi a^3 \sigma$ einsetzen, erhalten wir

$$(26) \quad V = \frac{2}{3} a^2 g \frac{\sigma' - \sigma}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{9\mu t}{2a^3(\sigma' + \frac{1}{2}\sigma)}} \right),$$

1) Es hätte sich vielleicht gelohnt, die verschiedenen Theorien der Brownschen Bewegung, bei welchen die Gültigkeit des Stokes'schen Gesetzes sogar für die einzelnen Zickzackwege der unregelmäßigen Bahn vorausgesetzt wird, im Lichte der eben erwähnten theoretischen Untersuchungen durchzuskutieren.

wo der erste Koeffizient gleich demjenigen der Formel (6') ist und der Ausdruck

$$(27) \quad \frac{2}{9} \frac{a^2}{\mu} (\sigma' + \frac{1}{2} \sigma)$$

die Rolle einer Art Relaxationszeit spielt. Von ihr hängt die Schnelligkeit, mit welcher die Kugel ihre Endgeschwindigkeit erreicht, in einfacher Weise ab. Sie wird ersichtlich desto größer, je größer die Dichte des Kugelmateri als oder der Flüssigkeit und je kleiner die innere Reibung der Flüssigkeit ist. Der Ausdruck $\frac{2}{9} (\sigma' + \frac{1}{2} \sigma)$ ist von der Größenordnung der Einheit und aus dem Faktor a^2/μ kann man leicht entnehmen, wie klein diese Relaxationszeit ist für alle allein in Betracht kommenden Fälle, die die Bedingung der „langsamen“ Bewegung noch erfüllen.

Neuerdings sind zwei experimentelle Arbeiten erschienen, die in einem gewissen Zusammenhange mit dem Gegenstande dieses Paragraphen stehen. Shewhart¹⁾ und Abbott²⁾ untersuchten mit Hilfe einer photographischen Methode die Fallbewegung von geladenen Wassertropfchen und Lycopodiumteilchen, die gleichzeitig durch ein elektrisches Wechselfeld in transversale Schwingungen versetzt wurden. Shewhart beobachtete eine Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit mit zunehmender Amplitude der transversalen Schwingungen, Abbott zeigte nachträglich, daß dieser Befund auf einem experimentellen Trugschluß beruhte. Keiner der beiden Autoren berücksichtigte leider die eben erwähnte umfangreiche Literatur über diesen Gegenstand, und die Schlußfolgerung von Abbott, daß „kein Grund aufgefunden wurde, warum die Stokes'sche Konstante $6\pi\mu a$ auch für diese Fälle von beschleunigter Bewegung nicht gelten sollte“, ist jedenfalls mit größter Vorsicht aufzunehmen. Speziell die letzte Versuchsreihe von Abbott mit dem fallenden Gummiball von 9 cm Durchmesser zeigt, wie kritiklos er bei der Auswertung seiner experimentellen Resultate vorgegangen ist, indem er auf die Eindeutigkeit der von ihm gewählten Erklärungsweise gar keine Rücksicht nahm. Aus der Übereinstimmung der experimentellen Kurve der Fallstrecken als Funktion der Zeit mit der aus der Annahme

1) W. A. Shewhart, Phys. Rev. 9. S. 425. 1917.

2) R. B. Abbott, Phys. Rev. 12. S. 381. 1918.

der Proportionalität der Kraft mit der Geschwindigkeit berechneten schließt er auf das Bestehen dieser Proportionalität. Da aber die in Rede stehende Kurve bei jedweden Widerstandsgesetze von Null ausgehen und nach sehr kurzer Zeit zu einer Geraden ($V = \text{konst.}$) werden muß, so ist es einleuchtend, daß man aus dem kurzen gebogenen Anfangsstück der Kurve in Anbetracht der kleinen Genauigkeit der Messungen, die mit einer gewöhnlichen Stoppuhr ausgeführt wurden, gar keine bindende Schlüsse ziehen kann. Der letzte Schluß von Abbott, daß „für viel größere Geschwindigkeiten, als diejenigen, die innerhalb der Gültigkeitsgrenzen des Stokes'schen Gesetzes liegen, die Widerstandskraft proportional mit der Geschwindigkeit ist“, enthält einen inneren Widerspruch: Da das Stokessche Gesetz für sehr kleine Geschwindigkeiten sicher gültig ist, so behält es offenbar seine Gültigkeit solange, als die Widerstandskraft proportional der Geschwindigkeit ist. In den Experimenten von Abbott war die Fallgeschwindigkeit des Gummiballes (die durch die Neigung der Zeit-Fallstrecke-Kurve bestimmt ist) viele hundertmal größer als nach dem Stokesschen Gesetze!

Auch Fräulein Snethlage¹⁾ hat einige Experimente über schwingende Teilchen in einem elektrischen Wechsel Felde angestellt, ohne dabei zu irgendwelchen positiven Schlüssen zu gelangen.

Auf die klassischen experimentellen Verifizierungen der Formel (22) für Pendelschwingungen gehen wir hier nicht näher ein.²⁾ Es sei nur erwähnt, daß Love sie geradezu als den überzeugendsten Beweis für die Richtigkeit der allgemein angenommenen Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit (bei kleinen Geschwindigkeiten) betrachtet, bei deren Ableitung ja manches (Linearität der Beziehung zwischen Spannung und Deformationsgeschwindigkeit, Reduktion von zwei Konstanten auf eine [vgl. § 2, Gleichung (5)]) einen etwas hypothetischen Charakter trägt.

§ 10. Berücksichtigung der Gleitung.

Die hydrodynamische Berechnung des Stokesschen Gesetzes kann leicht durch Berücksichtigung der Gleitung an

1) A. Snethlage, Proc. Ac. Amsterdam 19. S. 1006. 1917.

2) Vgl. A. E. H. Love, a. a. O. § 12.

der Oberfläche der Kugel ergänzt werden und in diesem Falle bekommt man, wie Basset¹⁾ gezeigt hat,

$$(28) \quad W = 6\pi\mu a \frac{\beta a + 2\mu}{\beta a + 3\mu} = 6\pi\mu a \frac{a + 2\gamma}{a + 3\gamma}.$$

Der Koeffizient der äußeren Reibung β und der Koeffizient der Gleitung γ wurden bereits im § 2, Gleichungen (4) und (5), definiert. Wir werden im zweiten Teile, wo die Teilchenbewegung in Gasen behandelt wird, auf die Formel (28) noch zu sprechen kommen. Bei tropfbaren Flüssigkeiten kommt bekanntlich die Gleitung der Flüssigkeit längs der festen Wände gar nicht in Betracht. In den bereits mehrfach erwähnten experimentellen Untersuchungen von Arnold war der Koeffizient der äußeren Reibung β jedenfalls größer als 5000, und wahrscheinlich größer als 50000. Arnold hat auch die Formel (28) zur Diskussion seiner Experimente an aufsteigenden Luftblasen hinzugezogen, doch, wie Smoluchowski²⁾ bereits bemerkt hat, konnte es sich dabei unmöglich um eine eigentliche Gleitung handeln, sondern man muß diesen Vorgang als eine Bewegung einer flüssigen Kugel in einer anderen Flüssigkeit auffassen. Näheres darüber vgl. § 12.

§ 11. Widerstandsgesetze für nicht kugelförmige Teilchen.

Das Problem der gleichförmigen, „langsamen“ Translation eines festen Ellipsoids in einem zähen Medium wurde von Oberbeck³⁾ gelöst. Aus den allgemeinen Formeln von Oberbeck hat Gans⁴⁾ Näherungsausdrücke für den Widerstandskoeffizienten in verschiedenen Spezialfällen abgeleitet, wie z. B. für kleine Abweichung von Kugelgestalt, für sehr abgeplattete Rotationsellipsoide (Näherung für Scheibchen), sehr gestreckte (Stäbchen) usw. Diese Formeln wurden von Zeleny und Mc Keehan⁵⁾ dazu gebraucht, um aus den mikroskopisch gemessenen Abweichungen von der Kugelgestalt verschiedener natürlicher Sporen (*Lycopodium*, *Lyc-*

1) A. B. Basset, *Phil. Trans.* **170**. S. 43. 1877.

2) M. Smoluchowski, *Cambr. Intern. Math. Congress* 1912.

3) A. Oberbeck, *Journ. f. Math.* **81**. S. 62. 1876; vgl. H. Lamb, „*Hydrodynamik*“ § 326.

4) R. Gans, *Sitzb. Akad. München*, S. 191, 1911.

5) J. Zeleny und L. W. Mc Keehan, *a. a. O.*

perdon und Polytrichum) auf die Abweichungen vom Stokes-schen Gesetz beim Fallen derselben in Luft zu schließen. Die derart geschätzten Abweichungen waren jedoch viel kleiner als die experimentell gefundenen Anomalien, die wahrscheinlich auf eine schwammartige Struktur dieser Teilchen zurückzuführen sind (vgl. auch die diesbezügliche Bemerkung von Abbott¹⁾). In einer Arbeit von Przi Bram²⁾ über die Brownsche Bewegung langgestreckter Teilchen findet man eine graphische Darstellung des Widerstandskoeffizienten eines gestreckten Ellipsoids, in Richtung der großen Achse und senkrecht dazu, als Funktion des Achsenverhältnisses, aufgetragen.

Für anders gestaltete Teilchen sind die theoretischen Werte der Widerstandskoeffizienten unbekannt, doch kann man nach Gans³⁾ aus der Linearität der Differentialgleichungen der „langsamen“ Bewegung für alle Teilchen die drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen besitzen, eine wichtige Folgerung ziehen: Solche Teilchen erleiden infolge der Druckkräfte der Flüssigkeit keine Drehimpulse, sie haben also nicht die Tendenz, beim langsamen Fallen in der Flüssigkeit sich irgendwie einzustellen. Bei der Bewegung eines Körpers mit drei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen in der Richtung einer der Hauptachsen kommt offenbar kein Drehmoment zustande. Es folgt daraus, daß das auch bei der Translation in einer beliebigen Richtung der Fall sein wird, denn infolge der Linearität der zugrunde gelegten Bewegungsgleichungen gibt die Superposition zweier Lösungssysteme wieder ein mögliches Lösungssystem, und man kann den Strömungszustand bei der betrachteten Translation als Superposition dreier Strömungszustände auffassen, die durch Translation des Körpers in der Richtung der drei Hauptachsen entstehen.

Ausdrücklich soll hier nochmals die vorausgesetzte „Langsamkeit“ der Bewegung betont werden, denn nur dadurch wird der Widerspruch, in welchem die Ganssche Regel mit alltäglichen Beobachtungen an fallenden Gegenständen zu stehen scheint, gehoben. Selbstverständlich handelt es sich auch bei der eben aufgestellten Regel erstens um Teilchen, deren

1) R. B. Abbott, a. a. O.

2) K. Przi Bram, Sitzb. Akad. Wien. 121. Abt. IIa. S. 2346. 1912.

3) R. Gans, a. a. O.

Schwerpunkt mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt, und zweitens um eine Flüssigkeit im Sinne der Hydrodynamik; bei hinreichend kleinen Teilchen muß die Brownsche Rotationsbewegung berücksichtigt werden.

§ 12. Bewegung einer flüssigen Kugel.

Das Stokessche Gesetz läßt sich auch leicht auf den Fall der Bewegung einer flüssigen Kugel (Koeffizient der inneren Reibung μ') ausdehnen, indem sowohl die Bewegung der äußeren, wie die der inneren Flüssigkeit durch die Differentialgleichung (2) der „langsamen“ Bewegung beherrscht werden; der Zusammenhang der beiden Strömungszustände ergibt sich aus der Bedingung, daß die drei Geschwindigkeitskomponenten und die drei Komponenten der Zugkraft sich beim Überschreiten der Kugeloberfläche stetig aneinander schließen müssen. Die Rechnung zeigt, daß die Kugel ihre Gestalt während der Bewegung beibehält; offenbar wird das nur solange der Fall sein, als die Trägheitskräfte, die eine Abplattung der Kugel bewirken, vernachlässigt werden können, d. h. solange die Bewegung „langsam“ und die Bewegungsgleichungen linear in den Geschwindigkeitskomponenten bleiben. Da die Lage des Angriffspunktes der äußeren Kräfte nicht gleichgültig ist, so nimmt man zweckmäßig von vornherein die infolge der Dichtedifferenz der beiden Flüssigkeiten wirkende Schwere als Bewegungsursache an.

Unabhängig voneinander finden Rybezynski¹⁾ und Hadamard²⁾ die folgende Formel für den Widerstandskoeffizienten der flüssigen Kugel

$$(29) \quad W = 6\pi\mu a \frac{3\mu' + 2\mu}{3\mu' + 3\mu}.$$

Danach ist die Fallgeschwindigkeit im Verhältnis

$$(29') \quad k = \frac{3\mu' + 3\mu}{3\mu' + 2\mu}$$

größer als diejenige einer eben solchen festen Kugel; k ist also zwischen den Grenzen 1 und $\frac{3}{2}$ (für $\mu' \ll \mu$) veränderlich. Die Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit, oder die Ver-

1) W. Rybezynski, Anz. Ak. Krakau, S. 40, 1911.

2) J. Hadamard, Compt. rend. 152. S. 1735. 1911; 154. S. 109. 1912.

kleinerung des Widerstandskoeffizienten hängt nur von dem Verhältnis der Koeffizienten der inneren Reibung der beiden Flüssigkeiten und keineswegs vom Radius der Kugel ab.

Die Experimente an fallenden Quecksilberkugeln in Ricinusöl von Roux¹⁾ und an Quecksilberkugeln in wasserhaltigem Glycerin und Nitrobenzolkugeln in Wasser von Nordlund²⁾ haben jedoch die Rybezynski-Hadamardsche Formel keineswegs bestätigt. Vielmehr ergaben sich Fallgeschwindigkeiten, die nur ganz wenig diejenigen gleichgroßer, fester Kugeln überstiegen; auch zeigte sich in den Experimenten von Roux ein gewisser Gang dieser Vergrößerung mit dem Radius der Kugeln, worauf wir noch gleich zu sprechen kommen. In den besonders sorgfältig ausgeführten Messungen von Nordlund an Quecksilberkügelchen von etwa $20\ \mu$ Durchmesser wurde die Fallgeschwindigkeit im Bereiche der experimentellen Fehler gleich derjenigen gefunden, die sich aus dem gewöhnlichen Stokesschen Gesetze ergibt, während sie nach Formel (29) um etwa 46 Proz. größer sein sollte. Übrigens gibt Nordlund an, daß „die Fallgeschwindigkeit von 0,076 Proz. größer als nach Stokes-Ladenburg³⁾ ist“, was wohl als eine grobe Überschätzung der Genauigkeit seiner Messungen bezeichnet werden darf. Es bedeute $\bar{\mu}$ den „scheinbaren“ Koeffizienten der inneren Reibung der „Fallflüssigkeit“ (Glycerin mit etwa 11 Proz. Wasser), wie er mit Hilfe des gemessenen Wertes der Fallgeschwindigkeit aus dem Stokesschen Gesetze [mit der Ladenburgschen Korrektur (30) für den Einfluß der zylindrischen Gefäßwand] berechnet wird und μ , wie gewöhnlich, den Koeffizienten der inneren Reibung der Fallflüssigkeit, dann stellen die bei Nordlund tabellierten Werte von $100 \frac{\bar{\mu} - \mu}{\bar{\mu}}$ die relativen, prozentuellen Vergrößerungen des Widerstandskoeffizienten in bezug auf das gewöhnliche Stokessche Gesetz für die einzelnen Messungen dar. Nach der Formel (29) mit Einsetzung der entsprechenden Reibungskoeffizienten des Quecksilbers und des Glycerins sollten diese Werte etwa gleich - 46 sein, während sie bei Nordlund unregelmäßig etwa zwischen

1) J. Roux, Ann. de Chim. et Phys. 20. S. 69. 1913.

2) J. Nordlund, Ark. för Mat. Astr. och Fysik 9. Nr. 13. 1913.

3) Das Fallgesetz, nach welchem feste Kugeln in den gebrauchten zylindrischen Gefäßen sich bewegen würden.

± 10 schwanken. Ihr arithmetisches Mittel beträgt $-0,0076$ (zufällig haben sich also die positiven und negativen Werte fast aufgehoben, die Auslassung einer einzigen Messung wäre aber genügend, um diesen Mittelwert auf das 10fache zu steigern), während der (quadratische) Mittelwert der Abweichungen vom arithmetischen Mittel etwa 3,4 beträgt. Daraus kann man die Genauigkeit des Resultates der 105 Messungen auf etwa 0,8 Proz. schätzen und als Schlußresultat die Tatsache ansehen, daß bei den Nordlundschen Messungen die Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit in bezug auf die Fallgeschwindigkeit eben so großer fester Kugeln 0,8 Proz. jedenfalls nicht viel überschreiten kann. Da die Rybczynski-Hadamardsche Formel (29) 46 Proz. erfordert, so ist dadurch ihre Unhaltbarkeit zur Genüge bewiesen.

Beide Autoren haben nun die Vermutung ausgesprochen, daß es sich hier um eine gewisse Wirkung der bei der Ableitung der Formel (29) nicht berücksichtigten Oberflächenspannung handeln müßte, was durch die theoretischen Untersuchungen von Boussinesq¹⁾ auch bestätigt erscheint. Selbstverständlich kommt man hier mir dem gewöhnlichen Ansatz für die Oberflächenspannung nicht aus, denn die Oberflächenspannung, wie man sie gewöhnlich betrachtet, könnte höchstens die Erhaltung der kugelförmigen Gestalt des Teilchens begünstigen, was in der Rybczynski-Hadamardschen Theorie sowieso durch die „Langsamkeit“ der Bewegung gewährleistet wird. Um zu einer brauchbaren Erklärung der eigenartigen Wirkung der Kapillarkräfte zu gelangen, welche darin besteht, daß eine kleine Flüssigkeitskugel sich beim Fallen fast wie ein fester Körper verhält, muß man die Oberflächenschicht in einem Bewegungszustande und nicht, wie das gewöhnlich geschieht, in einem Gleichgewichtszustande betrachten und eine Art innerer Reibung in dieser Schicht einführen. Das Bestehen einer solchen Oberflächenviskosität ist ja bereits von vornherein als sehr wahrscheinlich zu bezeichnen; Boussinesq, der unseres Wissens zum ersten Male ihre Wirkung auf die Bewegung der Flüssigkeit untersuchte, kommt mit Hilfe sehr plausibler molekularkinetischer Vorstellungen und gewisser Symmetriebetrachtungen zu den folgenden Aus-

1) J. Boussinesq, Ann. d. Chimie et Phys. 29. S. 349, 357, 364. 1913; vgl. auch Beibl. d. Phys. 87. S. 1357. 1913.

drücken, für die beiden „Haupt“-Oberflächenspannungen (pro Längeneinheit)

$$(30) \quad \begin{cases} F = f + e_1 (\partial + \partial') + 2 e \partial, \\ F' = f + e_1 (\partial + \partial') + 2 e \partial', \end{cases}$$

wo ∂ und ∂' die beiden „Haupt“-Dilatationsgeschwindigkeiten der Oberflächenschicht (in zwei zueinander senkrechten „Haupt“-Richtungen) bedeuten; e und e_1 sind zwei Koeffizienten der Oberflächenviskosität, und f , die Oberflächenspannung im Gleichgewicht, ist die gewöhnliche Kapillaritätskonstante.

In (30) sehen wir das zweidimensionale Analogon der Ansätze für die elastischen Spannungen, die gewöhnlich zum Plausibelmachen der Ansätze für die Spannungen in einer viskosen Flüssigkeit gebraucht werden. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man in der Theorie der inneren Reibung von Flüssigkeiten die beiden Konstanten mittels einer besonderen Annahme [§ 2, Gleichung (5)] auf nur eine reduziert, während hier diese Reduktion nicht durchgeführt wurde. Übrigens ist das für das Weitere sowieso ohne Belang, da in der endgültigen Formel für den Widerstandskoeffizienten die beiden Konstanten e und e_1 nur in einer Kombination

$$(31) \quad \varepsilon = e + e_1$$

auftreten.

Das am Anfange dieses Paragraphen formulierte hydrodynamische Problem ist nun in ersichtlicher Weise zu modifizieren; anstatt die Differenz der Zugkräfte in den beiden Flüssigkeiten an der Oberfläche der Kugel gleich Null anzunehmen, muß man sie gleich den durch (30) gegebenen Spannungen in der Oberflächenschicht setzen. Der weitere Gang der Rechnung wird von Boussinesq nach einer von ihm bereits im Jahre 1885 angegebenen, allgemeinen Methode zur Lösung des Stokesschen Problems durchgeführt, und schließlich gelangt er zur folgenden Formel für k , die Vergrößerung der Fallgeschwindigkeit der flüssigen Kugel im Verhältnis zu der Geschwindigkeit einer ebenso großen festen Kugel

$$(32) \quad k = \frac{\varepsilon + a(3\mu' + 3\mu)}{\varepsilon + a(3\mu' + 2\mu)}.$$

Hierin bedeuten μ' den Reibungskoeffizienten der inneren, μ denjenigen der äußeren Flüssigkeit und s ist die eben erwähnte Konstante der Oberflächenviskosität.

Wir bemerken gleich, daß diese Formel mindestens qualitativ von den oben besprochenen experimentellen Ergebnissen Rechenschaft zu geben gestattet. Die Werte für den Widerstandskoeffizienten, die sie liefert, liegen stets zwischen den Werten für feste Kugeln ($k=1$) und denjenigen, die sich aus der Rybczynski-Hadamardschen Formel ergeben [k nach Formel (29')]; mit kleiner werdendem Radius nähert sich die Fallgeschwindigkeit immer mehr der Geschwindigkeit fester Kugeln. Deshalb konnte auch Nordlund bei seinen Versuchen an Quecksilberkugeln keine merklichen Abweichungen vom gewöhnlichen Stokesschen Gesetz finden, während Roux, der mit viel größeren Hg-Kugeln arbeitete (600—900 μ , allerdings in einer anderen Flüssigkeit — Olivenöl bei Roux — Glyzerin bei Nordlund) 6—12 prozentige Abweichungen beobachtete. Auch der allgemeine Gang dieser Abweichungen — sie wuchsen mit dem Radius der Teilchen — stimmt mit der Boussinesqschen Theorie überein.¹⁾ Nichtsdestoweniger muß die Frage nach der experimentellen Verifizierung der von Boussinesq für die Oberflächenviskosität gemachten Ansätze solange als offen betrachtet werden, als keine ausgedehnteren Untersuchungen (für größere, einheitliche Bereiche von a) vorliegen. Denn daß das ursprüngliche Stokesche (feste Kugeln) und das Rybczynski-Hadamardsche Problem (flüssige Kugeln ohne Oberflächenviskosität) zwei Grenzfälle darstellen, zwischen welche sich die tatsächlich beobachteten Fallgeschwindigkeiten flüssiger Kugeln einordnen würden, das war von vornherein, ohne spezielle Theorie, einleuchtend; auch die Vergrößerung der Abweichungen vom Stokesschen Gesetze mit wachsenden Durchmesser der Teilchen konnte wohl ohne weiteres vorhergesehen werden. Es ist nur die Frage zu beantworten, ob der tatsächlich beobachtbare Gang der Veränderlichkeit des Widerstandskoeffizienten mit dem Teilchenradius dem von Boussinesq abgeleiteten wirklich entspricht, und dazu reichen die Experimente von Roux und Nordlund keineswegs aus. Es wäre vielmehr

1) Der numerische Wert von s läßt sich daraus ganz roh zu 1,4 g/sek schätzen.

erforderlich, in derselben Fallflüssigkeit und mit denselben flüssigen Teilchen, nur mit veränderlichen Radien, die allmähliche Veränderung des Widerstandskoeffizienten von solchen Werten an, die dem Stokesschen Gesetz für feste Kugeln entsprechen, bis zu solchen, wo die Oberflächenviskosität zu vernachlässigen ist und die also der Rybezynski-Hadamardschen Formel gehorchen, zu verfolgen.

Teilweise kann eine solche Kenntnis den bereits oft erwähnten Messungen von Arnold an aufsteigenden Luftbläschen in verschiedenen Ölen, sowie den analogen, früheren Messungen von Allen¹⁾ an Luftbläschen in Anilin entnommen werden. Wie wir im § 10 bereits erwähnt haben, hat Smoluchowski darauf hingewiesen, daß hier ein Beispiel für die Anwendung der Rybezynski-Hadamardschen Theorie vorliegt, aber erst durch Mitberücksichtigung der Oberflächenviskosität findet ein großer Teil der Arnoldschen Resultate seine sachgemäße Erklärung. So liegt die Mehrzahl der Steighöhen der Bläschen zwischen den Voraussagen des Stokesschen und des Rybezynski-Hadamardschen Gesetzes. Die Fig. 8 von Arnold, die den „scheinbaren“ Reibungskoeffizienten des Olivenöls (der unserem k umgekehrt proportional ist) in Funktion des Radius der Luftblasen darstellt, zeigt alle die von der Boussinesqschen Formel (32) geforderten Phasen der Abhängigkeit des Widerstandskoeffizienten vom Radius: Sehr kleine Kugeln ($a < 0,01$ cm) befolgen das gewöhnliche Stokessche Gesetz; der „scheinbare“ [nach der Formel (20') aus der gemessenen Steiggeschwindigkeit berechnete] Koeffizient der inneren Reibung ist gleich dem wirklichen, mit einem Viskosimeter meßbaren Koeffizienten. Mit wachsenden Radien folgt ein schnelles Abnehmen der scheinbaren Viskosität, die Steiggeschwindigkeit nimmt schneller zu, wie bei festen Kugeln, und bei $a = 0,04-0,05$ cm erreicht die Steiggeschwindigkeit den von der Rybezynski-Hadamardschen Formel geforderten Wert, d. h. (da μ' gegen μ zu vernachlässigen ist) $\frac{2}{3}$ der Geschwindigkeit gleichgroßer fester Kugeln. Das weitere Ansteigen der Arnoldschen Kurve erklärt sich durch das bereits erwähnte (vgl. § 8) Versagen der Ladenburgschen Korrektur.

1) H. S. Allen, a. a. O.

So weit stimmt alles schön mit der Theorie überein; doch kann man sich bei näherer Betrachtung leicht davon überzeugen, daß die Arnoldsche Kurve unmöglich mit der Boussinesqschen zur Deckung gebracht werden kann: Während die erste für verschwindende Radien der a -Achse parallel wird, ist das für die theoretische Kurve keineswegs der Fall. Noch schlimmer steht es um die Übereinstimmung in den Experimenten von Arnold in Leinöl. Die Frage, ob man die Schuld der Theorie oder den Experimenten zuschreiben soll, muß bis auf weiteres offen gelassen werden. In den Experimenten von Arnold trat eine interessante Nebenerscheinung auf, die die Messungen sehr erschwerte; es war das nämlich die „Erosion“ der Oberfläche der Teilchen, ein stetiges Abnehmen des Teilchenradius mit der vom Teilchen zurückgelegten Strecke.¹⁾ Bei größeren Tropfen von Alkohol in Olivenöl konnte man das Loslösen der Außenschicht, die sich dann zu einer großen Zahl von kleinen Tröpfchen zusammenzieht, direkt beobachten. Arnold hat gezeigt, daß man aus der Annahme, daß während der Bewegung der Kugel eine Schicht von der Dicke der Wirkungssphäre der molekularen Attraktion von der Kugel abgeschält wird und in der Fallflüssigkeit zurückbleibt, zu einer sehr plausiblen Größe dieser Wirkungssphäre gelangt. Obwohl es sich hier um eine grobe Schätzung handelt, so ist jedenfalls dadurch die Tatsache nahegelegt, daß wir es mit einer gewissen Wirkung der Kapillarkräfte zu tun haben, und es ist sehr wohl möglich, daß diese Erscheinung von der Bewegung der Kugel durch die Flüssigkeit, wie sie die Theorie von Boussinesq behandelt, nie streng geschieden werden kann.²⁾ Auch wird wohl, wie bei allen Oberflächeneffekten,

1) Einige analoge Erscheinungen, wo die Kapillarkräfte vielleicht eine ausschlaggebende Rolle spielen und von denen man sich noch schwerer eine geeignete Vorstellung bilden kann, fand Targonski (Arch. d. Geneve 41. S. 187. 1916) an Quecksilbertröpfchen in Luft; die Teilchen waren so klein, daß sie eine merkliche Brownsche Bewegung zeigten; das erschwerte ungemein das Verständnis des beobachteten Einflusses der sichtbaren Bewegung auf die Größenabnahme der Teilchen.

2) Die Erosion muß um so kleiner sein, je größer der Molekulardruck, die Zerreißfestigkeit ist. Vielleicht ließen sich die Experimente über die Erosion zu einer Methode der Messung des Molekulardruckes ausbilden.

die Reinheit der benutzten Materialien bei jeder experimentellen Verifikation der Boussinesqschen Formel eine große Rolle spielen; so beobachtete Allen bei seinen Luftbläschen in Anilin unregelmäßige Schwankungen der Steiggeschwindigkeit von Teilchen zu Teilchen, die höchstwahrscheinlich mit der zufälligen Beschaffenheit der Oberfläche (des Koeffizienten ϵ der Oberflächenviskosität) im Zusammenhange standen.

Jedenfalls scheinen die theoretische und die experimentelle Evidenz dafür zu sprechen, daß sich genügend kleine, flüssige Teilchen, wie klein auch ihre Oberflächenviskosität sein mag, in bezug auf ihre Beweglichkeit von ebensolchen, festen Teilchen nicht unterscheiden lassen. Diese Tatsache ist für die theoretische Kolloidchemie von außerordentlicher Wichtigkeit. Auch wird dadurch ein Einwand behoben, den Smoluchowski¹⁾ gegen die Anwendung der verschiedenen Theorien der Kataphorese auf Emulsoide erhebt, Theorien, die alle nur für feste (nichtleitende) Teilchen aufgestellt wurden; für Teilchen, die in der Kolloidchemie in Betracht kommen, werden schon die Kapillarkräfte dafür sorgen, daß man diese Teilchen als fest ansehen darf. Die Theorie der Kataphorese braucht also nur noch auf leitende Teilchen ausgedehnt zu werden.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität.

1) M. v. Smoluchowski, „Elektrische Endosmose und Strömungsströme“, § 32 in Graetz' „Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus“, Bd. II, Lt. 2.

(Eingegangen 14. August 1919.)

**2. Die Einführung
eines vernunftgemäßen Koordinatensystems in
die Einsteinsche Gravitationstheorie und das
Gravitationsfeld einer schweren Kugel;
von Gustav Mie.**

1. Die Einsteinsche Gravitationstheorie bringt die eigentümliche Schwierigkeit mit sich, daß die gewöhnlichen praktischen Definitionen der geraden Linie und der Längengleichheit unbrauchbar werden. Die praktische Durchführbarkeit der ganzen Geometrie beruht auf der Existenz unveränderlicher Körper, die man an den verschiedensten Orten und zu den verschiedensten Zeiten als Maßstäbe benutzen kann, um die zu messenden Abstände irgendwelcher Raumpunkte mit ihrer Länge zu vergleichen. Ebenso braucht man zur Vergleichung von Zeitintervallen unveränderliche physikalische Vorgänge (Schwingungen). Daß man solche unveränderlichen Maßstäbe für Längen und Zeiten praktisch einwandfrei herstellen kann, beruht letzten Grundes auf der Unveränderlichkeit der Atome und der Unabhängigkeit ihrer Beschaffenheit von Ort und Zeit.

Die Existenz absolut unveränderlicher Atome galt als eine Selbstverständlichkeit, solange man glaubte, zwischen den „von Materie erfüllten“ Teilchen und dem sie umgebenden „absolut leeren Raum“ scharf unterscheiden zu können. Nun wissen wir aber, daß diese Auffassung nicht richtig ist, daß vielmehr der sogenannte leere Raum als Weltäther selber der Schauplatz mannigfacher physikalischer Vorgänge ist und daß er überall auch in die Vorgänge, die man speziell als materielle Vorgänge bezeichnet, ganz wesentlich mit eingreift. Sobald man aus diesen Erkenntnissen die notwendige Konsequenz zieht und die scharfe Abgrenzung zwischen „Materie“ und „leerem Raum“ fallen läßt, gelangt man dazu, in einer nunmehr zu erstrebenden „Theorie der Materie“ die materiellen Teilchen nur als Stellen im Äther aufzufassen, an welchen eine Zusammen-

ziehung ganz enormer Energiemengen auf einen winzigen Raumteil stattfindet. Sie können dann keine absolut unveränderlichen Atome sein. Man muß vielmehr mit Bestimmtheit erwarten, daß diese Energieknoten im Äther sich verändern, wenn sie von Gegenden, wo der Äther an und für sich feldfrei ist, in Gebiete überführt werden, wo von vornherein starke elektromagnetische oder Gravitationsfelder vorhanden sind. Es ist eines der wichtigsten Probleme der „Theorie der Materie“, eine Erklärung dafür zu finden, daß sich trotzdem in Wirklichkeit die materiellen Teilchen fast wie feste harte Partikelchen verhalten, die von dem Vorhandensein irgendwelcher Felder so wenig beeinflußt werden, daß man ihre Veränderungen mit den uns jetzt zur Verfügung stehenden experimentellen Hilfsmitteln noch nicht beobachtet hat.¹⁾ Für die Gravitationsfelder ist dieses Problem durch die Einsteinsche Gravitationstheorie vollständig gelöst. Nach dieser Theorie sind die Veränderungen der materiellen Teilchen in einem Gravitationsfeld ganz allein durch das Gravitationspotential bedingt. Die Feldstärke des Gravitationsfeldes kommt lediglich als Gefälle des Gravitationspotentials in dem Teilchen zur Geltung, so daß in einem Gravitationsfeld nach Maßgabe dieses Gefälles die Veränderung des Teilchens mehr oder weniger inhomogen ist. Die Veränderungen selber bestehen nach der Einsteinschen Theorie nur in einer Veränderung sämtlicher Maßeinheiten, man kann sagen: sie bestehen in einer Deformation des von dem Teilchen und den in ihm sich abspielenden Vorgängen erfüllten kleinen Raum-Zeitgebietes. Das Gravitationspotential selber ist ein vierdimensionaler Tensor, seine Komponenten seien im folgenden mit $\omega^{\mu\nu}$ bezeichnet. Ich will die aus diesen $\omega^{\mu\nu}$ gebildete Determinante mit ω bezeichnen, ferner seien die Größen $\omega_{\mu\nu}$ durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i \omega_{\mu i} \cdot \omega^{i\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \\ \delta_{\mu}^{\mu} = 1 \text{ und } \delta_{\mu}^{\nu} = 0, \mu \neq \nu. \end{array} \right. \quad \text{wo}$$

Endlich führe ich noch ein:

1) G. Mie, Physik. Zeitschr. 18. S. 551. 574. 596. 1917.

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \sqrt{\omega} \cdot \omega_{\mu\nu}, \\ g^{\mu\nu} &= \frac{\omega^{\mu\nu}}{\sqrt{\omega}}, \end{aligned} \right.$$

so daß also auch

$$\sum g_{\mu i} \cdot g^{i\nu} = \delta_{\mu}^{\nu} \quad (1)$$

Ein Raum-Zitelement, das im gravitationsfreien Gebiet die Form einer vierdimensionalen Kugel vom Radius 1 hat, bekommt durch den Einfluß des Gravitationspotentials $\omega^{\mu\nu}$ die Form eines Ellipsoides, dessen Gleichung lautet:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} g_{11} \cdot \xi_1^2 + g_{22} \cdot \xi_2^2 + g_{33} \cdot \xi_3^2 + g_{44} \cdot \xi_4^2 + 2g_{23} \cdot \xi_2 \xi_3 \\ + 2g_{31} \cdot \xi_3 \xi_1 + 2g_{12} \cdot \xi_1 \xi_2 + 2g_{14} \cdot \xi_1 \xi_4 \\ + 2g_{24} \cdot \xi_2 \xi_4 + 2g_{34} \cdot \xi_3 \xi_4 = \pm 1. \end{aligned} \right.$$

Das Vorzeichen ist, je nachdem es sich um raumartige oder um zeitartige Radienvektoren handelt, als + oder als - zu wählen. Im gravitationsfreien Gebiet nimmt das Gravitationspotential den skalaren Wert 1 an, $\omega^{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$, entsprechend ist dann auch $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$.

Sollen in einem Gravitationsfeld Längen und Zeiten bestimmt werden, so muß man an den mit den deformierten Atomen direkt gemessenen Werten nach Maßgabe des Gravitationspotentials an der betreffenden Stelle erst noch Korrekturen anbringen. Man muß also zur Bestimmung der richtigen Werte von Längen und Zeiten das Gravitationspotential schon haben. Dazu aber muß man ein Koordinatensystem besitzen, denn das Potential kann nur als Funktion der Raum-Zeitkoordinaten gegeben sein. Da man nun dieses Koordinatensystem nicht durch praktisch-geometrische Messungen, die sich auf die Annahme unveränderlicher Atome stützen, bekommen kann, so muß man sich fürs erste mit einer willkürlichen Numerierung der Raum-Zeitpunkte begnügen. Um ein für die physikalischen Anwendungen brauchbares Koordinatennetz zu ge-

1) Da ich im folgenden öfters das Buch von H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, zitiere, sei hier gleich bemerkt, daß meine $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ das umgekehrte Vorzeichen haben, wie die entsprechend bezeichneten Größen bei Weyl. Ferner ist in diesem Buch, wie auch in den Einsteinschen Veröffentlichungen die Determinante der $g_{\mu\nu}$ mit g bezeichnet, es ist leicht zu sehen, daß $\omega = g$.

winnen, geht man am besten von der fundamentalen Tatsache aus, daß das Tensorpotential $\omega^{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes auch in den stärksten Feldern, die in der Wirklichkeit vorkommen, nur um ganz winzig kleine Beträge von dem skalaren Wert 1 abweicht. Es sind also auch die vier Werte g_{11} , g_{22} , g_{33} , g_{44} von der 1, und die $g_{\mu\nu}$, $\mu \neq \nu$, von der 0 praktisch kaum zu unterscheiden. Wir legen nun durch einen geeignet gewählten Koordinatenanfang vier aufeinander senkrechte Koordinatenachsen, indem wir die Methoden der praktischen Geometrie, die auf der Annahme der Unveränderlichkeit der Atome beruhen, zur Konstruktion der Geraden und der senkrechten Winkel benutzen. Die so konstruierten Geraden und Winkel werden wir mit Einstein als die natürlichen Geraden und Winkel bezeichnen. Die Konstruktionsmethoden sind für *räumliche* Geraden jedem, der einmal geometrisch gezeichnet hat, so geläufig, daß ich sie hier wohl nicht zu erörtern brauche. Eine *zeitliche* natürliche Gerade wird von dem Schwerpunkt eines materiellen Körpers beschrieben, wenn auf ihn keine Kräfte wirken. Ruht der Punkt in dem Koordinatenanfang, so beschreibt er eine zeitliche Gerade, die auf den drei zur Zeit $t = 0$ konstruierten räumlichen Koordinatenachsen senkrecht steht. Wir denken uns nun weiter die Koordinatenachsen in lauter „natürlich“ gleiche Teile geteilt, beispielsweise die drei räumlichen Achsen in Zentimeter, die zeitliche Achse in die entsprechende Zeiteinheit: $\frac{1}{3 \cdot 10^{10}}$ Sek. Wir können uns diese Teilung immer so fein denken, daß in dem kleinen vierdimensionalen Einheitswürfel am Koordinatenanfang die Geometrie auch mit den feinsten jeweils praktisch zur Verfügung stehenden Mitteln von der Euklidischen bzw. Minkowskischen Geometrie nicht zu unterscheiden ist. Schreitet die Verfeinerung der Meßmethoden fort, so macht man die Teilung entsprechend feiner, so daß unsere Bedingung für den Würfel im Koordinatenanfang immer erfüllt bleibt. Wir wollen nun zunächst die beiden Koordinatenachsen 1 und 2 betrachten. In der Nähe des Koordinatenanfanges bestimmen sie eine Ebene, in welcher die eine quadratische Seitenfläche des Würfels liegt. Wir verlängern die beiden anderen Seiten dieses Quadrates zu beliebig langen, natürlichen Geraden 1' und 2' und bringen auf diesen beiden zu den Achsen 1 und 2 „parallel“ laufenden Geraden eine ganz gleiche Teilung an, wie auf den Achsen

selber. Legen wir durch je zwei entsprechende Punkte von 1 und 1' und ebenso von 2 und 2' immer je eine natürliche Gerade, so bekommen wir eine Art ebenes Koordinatennetz.¹⁾ Jedoch wird sich in etwas größeren Entfernungen vom Koordinatenanfang der Einfluß der Deformationen durch das Gravitationsfeld in der Weise bemerkbar machen, daß sich die Netzfäden in den Netzknoten nicht richtig schneiden, sondern nur dicht aneinander vorbeikreuzen. Da das Gravitationspotential nur sehr wenig von dem skalaren Wert 1 verschieden ist, so sind die Mängel des unter der Annahme unveränderlicher Atome konstruierten Netzes auch in weiten Gebieten des Raumes nur sehr klein. Man denke sich nun an jedem der etwas mangelhaften Netzknoten einen Punkt zwischen den beiden sich kreuzenden Geraden, an welchem beide sehr dicht vorbeigehen, und betrachte diesen mit einer gewissen Willkürlichkeit gewählten Punkt als den eigentlichen Netzknoten. Die so festgelegten Netzknoten definieren dann zusammen, wenn man das Netz unendlich dicht macht, die Koordinatenebene (1. 2.). Wir wollen die wirklich durch die Netzknoten hindurchlaufenden Linien als die „richtigen“ korrigierten Koordinatengeraden auffassen im Gegensatz zu den unkorrigierten „natürlichen Geraden“. In derselben Weise konstruieren wir mit ähnlichen Willkürlichkeiten Koordinatenebenen (1. 3.) und (2. 3.) mit Koordinatennetzen darin, ferner drei sehr benachbarte Ebenen (1' 2') sowie (1' 3') und (2' 3'), welche in der Nähe des Koordinatenanfanges in die entsprechenden Seitenflächen des kleinen vierdimensionalen Einheitswürfels übergehen. Auch in diesen drei sehr benachbarten Ebenen denken wir uns Koordinatennetze ausgeführt. Legen wir schließlich durch je zwei entsprechende Punkte der Ebenen (1. 2.) und (1' 2'), ebenso (1. 3.) und (1' 3'), endlich auch (2. 3.) und (2' 3'), je eine natürliche Gerade, so bekommen wir ein dreidimensionales Koordinatennetz, welches aber denselben Mangel

1) Ich beschränke mich in dieser Untersuchung der Einfachheit halber auf den Fall, daß der leere Raum an sich euklidisch ist. Bekanntlich hat Einstein seine Theorie in der Abhandlung „Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie“ (Ber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin, Jahrgang 1917, S. 142) auf den Fall ausgedehnt, daß der dreidimensionale leere Raum sphärisch ist. Die Übertragung meiner Betrachtungen auf diesen Fall bietet keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten.

richtiger Netzknoten aufweist, wie das aus natürlichen Geraden vorhin konstruierte zweidimensionale Netz. Die natürlichen Geraden des dreidimensionalen Netzes schneiden sich wenigstens in größeren Entfernungen von den Achsen nicht mehr genau in Netzknoten, sondern sie kreuzen nur an den Knotenstellen dicht aneinander vorbei. Man wählt nun wieder mit einiger Willkür an jeder Knotenstelle einen Punkt, an welchem die drei Koordinatenlinien sehr dicht vorbeigehen, als den eigentlichen Netzknoten, legt durch das so bestimmte System von Netzknoten Linien, die man im Gegensatz zu den natürlichen Geraden als die richtigen korrigierten Geraden des Koordinatennetzes zu bezeichnen hat. Macht man die Maschen des Netzes unendlich klein, so bilden die gewählten Netzknotenpunkte die dreidimensionale Koordinatenebene (1. 2. 3.). Genau ebenso kann man die anderen dreidimensionalen Ebenen, nämlich (2. 3. 4.), ferner (3. 1. 4.) und (1. 2. 4.) mit ihrem ganzen Koordinatennetz konstruieren. Es ist leicht zu sehen, wie man von da aus weiter zu einem vierdimensionalen Koordinatennetz kommt, in welchem überall in einem ziemlich weiten Bereich um den Koordinatenanfang herum, die korrigierten geraden Koordinatenlinien nur wenig von natürlichen Geraden abweichen, in welchem also auch die natürlichen Geraden an den Netzknoten überall sehr nahe vorbeikreuzen.

Hat man auf diese Weise, nicht ohne einige Willkürlichkeit, ein Koordinatennetz konstruiert, so kann man weiter so verfahren, daß man die Deformationen der Atome und der Atomvorgänge bestimmt, indem man die gewählten Koordinatenlinien als die richtigen Geraden betrachtet. Die Abweichungen der natürlichen unkorrigierten Geraden von ihnen geben die Möglichkeit, überall den Deformationstensor, dessen Komponenten ich $g_{\mu\nu}$ nennen will, zu berechnen. Für die Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4) einer natürlichen Geraden bestehen nämlich die vier Differentialgleichungen¹⁾:

$$(4) \quad \frac{d^2 x_i}{dp^2} + \sum_{h,k} \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{dp} \cdot \frac{dx_k}{dp} = 0,$$

wo p ein den Punkten der Kurve zugeordneter Parameter ist, z. B. die Bogenlänge von einem bestimmten Kurvenpunkt an,

1) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, S. 102.

wo ferner die $\left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ i \end{smallmatrix} \right\}$ die Christoffelschen Symbole¹⁾ bedeuten:

$$(5) \quad \left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ i \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \sum_j g^{ij} \cdot \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j} \right).$$

Im folgenden werde ich mich in allen Formeln, die ich gelegentlich noch brauche, der von Einstein eingeführten einfacheren Schreibweise bedienen, in welcher die Summenzeichen einfach weggelassen werden. Es soll also ein für allemal festgesetzt sein, daß ein Ausdruck, in welchem ein Indexzeichen doppelt vorkommt, über diesen Index von 1 bis 4 zu summieren ist. Nach dieser Schreibweise sehen die Gleichungen (4) und (5) folgendermaßen aus:

$$(4') \quad \frac{d^2 x_i}{d p^2} + \left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ i \end{smallmatrix} \right\} \cdot \frac{d x_h}{d p} \cdot \frac{d x_k}{d p} = 0.$$

$$(5') \quad \left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ i \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{ij} \cdot \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_j} \right).$$

Um noch ein Beispiel zu bringen, sei angeführt:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \mu & r \\ r \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} \mu & 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu & 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu & 3 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \mu & 4 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\}.$$

In den Formeln (4) und (5) bedeuten, um es noch einmal deutlich hervorzuheben, die $g_{\mu\nu}$ die Komponenten des Tensors der Deformation der Atome und der Atomvorgänge in bezug auf das von uns konstruierte und als geradlinig-orthogonal angenommene Koordinatensystem, die $g^{\mu\nu}$ sind Funktionen der $g_{\mu\nu}$, die sich aus den Gleichungen

$$g_{i\mu} \cdot g^{i\nu} = \delta_\mu^\nu$$

berechnen lassen. Wir wollen nun sehen, wie man die Werte $g_{\mu\nu}$ finden kann. Da die natürlichen Geraden uns empirisch gegeben sind, so sind auch die Differentialquotienten dx_i/dp und $d^2 x_i/dp^2$ durch Messungen zu ermitteln, und die Gleichungen (4) geben uns, wenn wir eine bestimmte natürliche Gerade herausgreifen, vier Differentialgleichungen erster Ordnung für die gesuchten Tensorkomponenten $g_{\mu\nu}$ mit empirisch bestimmten Koeffizienten. Gehört die herausgegriffene Gerade zu einer Schar von Geraden, die Raum und Zeit lückenlos ausfüllen, etwa zu der Schar aller natürlichen Ge-

1) H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, S. 98.

raden, die auf einer dreidimensionalen Koordinatenebene senkrecht stehen, so bekommt man die Koeffizienten der Differentialgleichungen (4) als Funktionen der Koordinaten, die man aus den Ergebnissen der praktischen Messungen bestimmen kann. Wenn man in derselben Weise andere Scharen von natürlichen unkorrigierten Geraden benutzt, so bekommt man andere Differentialgleichungen für die $g_{\mu\nu}$, und man kann sich so immer eine genügende Zahl von Gleichungen verschaffen, um schließlich die $g_{\mu\nu}$ vollständig als Funktionen der (x_1, x_2, x_3, x_4) zu gewinnen. Wie man diese Berechnung des Deformationstensors $g_{\mu\nu}$ wirklich durchführen kann, werden wir weiter unten an einem einfachen Beispiel sehen.

Aus den so erhaltenen Werten $g_{\mu\nu}$ kann man nun aber ohne weiteres nach (1) und (2) das Gravitationspotential berechnen:

$$\omega^{ik} \cdot g_{ih} = \sqrt{g} \cdot \delta_h^k.$$

Denn bei Annahme dieses Gravitationspotentials sind zunächst einmal die Deformationen der von dem Gravitationsfeld erfüllten Raum-Zeitgebiete gerade die, welche die Einsteinsche Gravitationstheorie verlangt. Außerdem aber erfüllen die $\omega^{\mu\nu}$ auch die Grundgleichungen des Gravitationsfeldes, immer vorausgesetzt natürlich, daß die Einsteinsche Gravitationstheorie zutrifft, denn nach dieser Theorie müssen die Abweichungen der Geometrie der natürlichen Geraden von der Minkowskischen Geometrie folgendermaßen mit der Anwesenheit schwerer Körper verknüpft sein: Man berechne 40 Größen $\mathfrak{t}_{\mu\nu}^a$, die wir späterhin als die 40 Komponenten des Gravitationsfeldes bezeichnen werden, nach den Formeln:

$$(6) \quad \mathfrak{t}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \mu \nu \\ a \end{matrix} \right\} - \frac{1}{4} \delta_\nu^a \cdot \left\{ \begin{matrix} \mu r \\ r \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} \delta_\mu^a \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu r \\ r \end{matrix} \right\},$$

wo die Christoffelschen Symbole nach (5) zu berechnen sind, dann ist:

$$(7) \quad \frac{\partial \mathfrak{t}_{\mu\nu}^a}{\partial x_a} = -h_{\mu\nu},$$

wo $h_{\mu\nu}$ die $\mu\nu$ -Komponente des Tensors „Dichtigkeit der schweren Masse“ bedeutet. Diese Dichtigkeit der schweren Masse kann man aus der Weltfunktion H des gesamten Ätherzustandes an der betreffenden Stelle berechnen als:

$$(8) \quad h_{\mu\nu} = - \frac{\partial H}{\partial \omega^{\mu\nu}}.$$

Das von uns ziemlich willkürlich, angenommene Koordinatensystem ist also für die Physik sofort brauchbar, insofern in ihm die Grundgleichungen der Physik die einfachste Form annehmen, die sie haben können. Denn auch die Gleichungen für das elektromagnetische Feld haben in ihm die bekannte einfache Form. Es ist eben die charakteristische Eigentümlichkeit der Einsteinschen Theorie, daß die Grundgleichungen für jedes ganz beliebig gewählte Koordinatensystem ihre Form unverändert behalten. Oder mit anderen Worten: Die Grundgleichungen der Physik sind, wenn man das Gravitationspotential in der eben beschriebenen Weise definiert, für jede beliebige Koordinatentransformation invariant.

2. Danach könnte es so scheinen, als ob jedes beliebige Koordinatensystem für Raum und Zeit völlig gleichberechtigt wäre. Wir haben aber schon im vorhergehenden eine wesentliche Beschränkung eingeführt, deren Notwendigkeit jeder ohne weiteres zugeben wird, indem wir verlangten, daß die korrigierten Geraden des anzunehmenden Koordinatensystems in einem weiten Gebiet um den Nullpunkt herum von den natürlichen Geraden nur äußerst wenig abweichen dürfen. Würde man diese Beschränkung nicht machen, so würde man zu solchen physikalischen Monstra geführt werden, wie ich in meinen Göttinger Vorträgen¹⁾ eines in dem sich ohne alle reelle Ursachen schlängelnden Stabe geschildert habe, oder es würden Wellen vorkommen können, die sich, ohne Energie zu übertragen, durch den Raum fortpflanzen²⁾, dergleichen Unsinnigkeiten kann es noch mehr geben. Wir müssen das Koordinatensystem so wählen, daß auch die allerwinzigsten Spuren solcher physikalischer Sinnlosigkeiten ausgeschlossen werden.

Wie notwendig für die Physik die Wahl eines in dieser Beziehung einwandfreien Koordinatensystems ist, erkennt man besonders gut an einem einfachen Beispiel, an welchem ich zugleich das bisher Gesagte erläutern will, nämlich dem Gravitationsfeld einer im Raume ruhenden Kugel.

Als Koordinatenanfang wähle ich den Kugelmittelpunkt *O*. Dieser Punkt liefert, wenn man sich ihn im Ablauf der Zeit

1) G. Mie, *Physik. Zeitschr.* 18. S. 599. 1917.

2) A. Einstein, *Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin* 1916. S. 696.

vorstellt, eine zeitartige Gerade, welche wir als Zeitachse wählen. Außerdem konstruiere ich in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ nach den Methoden der praktischen Geometrie drei aufeinander senkrechte Gerade durch O , welche die x -, y - und z -Achse darstellen. Weiter konstruiere ich in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ ein vollständiges Koordinatennetz. Erfahrungsgemäß wird die räumliche Geometrie von dem Gravitationsfeld so wenig beeinflusst, daß man auch mit den allerfeinsten Mitteln von der Unvollkommenheit der Netzknoten des natürlich konstruierten Koordinatensystems nichts bemerken kann. Das korrigierte Koordinatennetz in dem dreidimensionalen Raum $t = 0$ ist also praktisch völlig identisch mit dem unkorrigierten natürlichen Netz. Ich teile nun mit Hilfe einer Uhr die Zeitachse in lauter gleiche Abschnitte und lege durch jeden Teilpunkt einen Raum $t = \text{const.}$ mit einem Koordinatennetz, das genau so liegt, wie das im Raume $t = 0$. Ein Punkt $(x, y, z) = \text{const.}$ beschreibt dann eine zeitartige Linie, die überall von der Zeitachse gleichen Abstand hat, eine „Parallele“ zur Zeitachse. Aber diese Parallele ist nicht identisch mit einer natürlichen Geraden. Beobachten wir einen freischwebenden schweren Massepunkt, der zur Zeit $t = 0$ im Punkte (x, y, z) ruht, so nähert er sich, wenn keine Kräfte (selbstverständlich außer der Schwerkraft) auf ihn wirken, wenn er also eine natürliche zeitartige Gerade beschreibt, nach dem Fallgesetz beschleunigt dem Kugelmittelpunkt O . Wollen wir also das vierdimensionale Koordinatennetz nach den natürlichen Methoden konstruieren, so finden wir, daß in einiger Entfernung von der dreidimensionalen Ebene $t = 0$ die unkorrigierten zweiartigen Koordinatenlinien an den ihnen entsprechenden Netzknoten des raumartigen Netzes in der dreidimensionalen Ebene $t = \text{const.}$ vorbeikreuzen. Die zeitartigen natürlichen Koordinatenlinien werden von solchen schweren Punkten beschrieben, die bis zur Zeit $t = 0$ aufwärts steigen, im Punkte $t = 0$ ihre größte Höhe erreichen, und von da an fallen. Die so definierten Zeitlinien stehen auf der dreidimensionalen Ebene $t = 0$ senkrecht, weil zur Zeit $t = 0$ der Punkt die Geschwindigkeit Null hat, d. h. die von ihm beschriebene zeitartige Linie keine raumartigen Komponenten hat. Zu den $t = 0$ unendlichen benachbarten Zeiten gehen diese zeitartigen Linien durch die entsprechenden

Netzknoten genau hindurch, wenn man von unendlich kleinen Abweichungen zweiter Ordnung absieht.

Daß die zeitartigen Linien gegenüber den raumartigen Linien eine besondere Rolle spielen, liegt an der Konstitution der Welt, wenn man sie vierdimensional betrachtet. Die materiellen Körper bilden in der Raum-Zeit massive Zylinder, die sich in zeitartiger Richtung beiderseits ins Unendliche erstrecken, während ihre raumartigen Querschnitte (die von den Körpern erfüllten dreidimensionalen Raumgebiete) verhältnismäßig sehr eng begrenzt sind. Man muß dabei beachten, daß eine Zeitstrecke von nur 1 Sekunde Länge gleich zu setzen ist einer raumartigen Strecke von 300000 km. Danach ist es leicht zu verstehen, daß an zeitlichen Linien, die in unbegrenzter Ausdehnung nahe an dem schweren Körper verlaufen, die Abweichungen der natürlichen Geometrie von der Minkowskischen Geometrie viel eher zu beobachten sind, als an raumartigen Linien, die nur über eine kurze Strecke dem Gravitationszentrum nahe sind und im allgemeinen in fast gravitationsfreien Gebieten verlaufen.

Wollte man nun einfach nach der oben gegebenen Anweisung zur Konstruktion des vierdimensionalen Koordinatennetzes verfahren, so hätte man als Netzknoten irgendwelche Punkte zu wählen, die zwischen den Punkten, wo sich die raumartigen natürlichen Geraden ungefähr schneiden, und zwischen der daran vorbeikreuzenden zeitartigen natürlichen Geraden liegen. So willkürlich darf man nun aber in der Physik nicht verfahren. Man *muß* vielmehr als korrigierte zeitartige Geraden die vorhin als Parallelkurven zur Zeitachse definierten Linien wählen, die überall durch entsprechende Netzknoten der durch die Punkte der Zeitachse hindurchgelegten dreidimensionalen ebenen Koordinatennetze gehen. Das heißt mit anderen Worten, man *muß* die Punkte der schweren Kugel selbst und alle Punkte, die, natürlich gemessen, relativ zu ihr ruhen, als ruhend ansehen. Wollte man das Koordinatennetz anders konstruieren, so würden sich die Punkte der Kugel selber bewegen, ohne daß diese Bewegung eine andere Ursache hätte, als die Wahl des Koordinatennetzes. Diese Wahl des Koordinatennetzes verstieße gegen den obersten Grundsatz der Vernunft, keine anderen Veränderungen in der Welt und im Weltgeschehen anzunehmen, als solche, die durch den objektiven Tatbestand

unbedingt notwendig begründet sind. Diesen Grundsatz nennt Kant die *Maxime der Vernunft*. Sie ist es, die uns zwingt, den ohne reelle Ursache sich schlängelnden Stab und die Gravitationswellen ohne Energieübertragung zu verwerfen. Ebenso zwingt sie uns, ein Koordinatennetz, in welchem sich die Punkte unserer Kugel noch bewegen, als „unvernünftig“ zu verwerfen.

3. Das Koordinatennetz im Felde einer ruhenden schweren Kugel ist danach schon so weit festgelegt, daß wir „praktisch“ keine Wahl mehr haben. In der Tat sind denn auch praktisch im Felde der Erde Ort und Zeit überall ganz eindeutig zu definieren. Ich will nun zeigen, wie man das Gravitationspotential aus den Abweichungen der natürlichen von den vernünftig korrigierten Zeitgeraden berechnen kann. Eine vernünftig korrigierte Zeitgerade beschreibt ein Punkt (x_0, y_0, z_0) , der sich relativ zur Kugel immer an derselben Stelle befindet. Dieser Punkt (x_0, y_0, z_0) sei der Kulminationspunkt eines senkrecht aufwärts geworfenen Massenteilchens, welches sich zur Zeit t im Punkte (x, y, z) befinde, zur Zeit $t = 0$ gerade (x_0, y_0, z_0) erreiche und dann wieder frei herunterfalle. Dieses Massenteilchen beschreibt eine natürliche Zeitgerade, welche die vernünftige Gerade in dem Punkt $(x_0, y_0, z_0, 0)$ berührt. In einem unendlich benachbarten Punkt $(x_0, y_0, z_0, i dt)$ hat die natürliche Zeitgerade von der vernünftigen Geraden eine Abweichung, die unendlich klein von zweiter Ordnung ist, wir haben demnach an dieser Stelle in die Gleichung (4) einzusetzen:

$$d x_1 = d x_2 = d x_3 = 0, \quad d x_4 = i \cdot d t.$$

Wir bekommen so für das Gravitationspotential die Gleichungen:

$$d^2 x = \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} \cdot d t^2, \quad d^2 y = \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} \cdot d t^2, \quad d^2 z = \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} \cdot d t^2,$$

$$d^2 t = \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} \cdot d t^2.$$

Beachtet man nun, daß in außerordentlich guter Näherung $g^{ij} = \delta_i^j$, daß ferner alle Differentialquotienten nach $x_4 = i t$ Null sind, so ergibt sich:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial x}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial y}, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial z},$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 44 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} = 0,$$

wenigstens mit äußerst guter Näherung. — $\frac{1}{2} g_{44}$ ist also das, was man das Newtonsche Gravitationspotential nennen könnte, sein Gradient ist die Fallbeschleunigung. Setzt man die in der Nähe einer schweren Kugel empirisch ermittelten Werte für $d^2 x/dt^2$ usw. in die Gleichungen ein, so bekommt man für g_{44} Differentialgleichungen, durch welche es vollkommen bestimmt ist. Bekanntlich ergibt sich, jedenfalls mit einer Annäherung, welche die Beobachtungen durchweg mit ausreichender Genauigkeit wiedergibt:

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{r},$$

wo a eine Konstante ist, die von der schweren Masse der Kugel abhängt. Praktisch ist a/r immer winzig klein gegen 1. Die anderen Komponenten des Deformationstensors lassen sich aus praktischen physikalischen oder geometrischen Messungen noch nicht ermitteln, aber nur aus dem Grunde, weil die räumlichen Deformationen unmeßbar klein sind und deswegen die empirischen Unterlagen für die Aufstellung der zur Berechnung notwendigen Gleichungen zur Zeit noch fehlen. Sehen wir über diesen Mangel zunächst hinweg, so haben wir die auf S. 52 allgemein gestellte Aufgabe der Ermittlung der $g_{\mu\nu}$ in unserm Spezialfall wirklich gelöst.

4. Ich will jetzt annehmen, die Meßkunst sei so weit fortgeschritten, daß man die räumlichen Deformationen ebenfalls erkennen kann, daß man also feststellen kann, in welchen Entfernungen die natürlichen unkorrigierten räumlichen Koordinatenlinien an den Knotenstellen aneinander vorbeikreuzen, anstatt sich wirklich zu schneiden. Dann wäre die Wahl des Koordinatensystems nicht mehr so eindeutig, wie wir bisher angenommen haben. Denn dann müßte man erst noch über die Lage der „richtigen korrigierten“ Netzknoten des räumlichen Koordinatensystems Annahmen machen, die bis zu einem gewissen Grade wieder willkürlich wären. Daß man aber auch hier nicht völlig willkürlich vorgehen kann, sieht man daraus, daß die Koordinatengeraden in der Umgebung eines Körpers, der als kugelsymmetrisch beschrieben werden kann, auch so definiert werden müssen, daß der Körper in dem Koordinatensystem wirklich kugelsymmetrisch ist. Denn im anderen Falle handelte man wieder gegen die oben ausgesprochene Maxime unserer Vernunft, indem man lediglich durch die Wahl des Koordinaten-

systems eine Unsymmetrie bekäme, die gar nicht im objektiven Tatbestand begründet ist.

Es ist nun die Frage, ob dieser Grundsatz ausreicht, um, abgesehen natürlich von den immer erlaubten Lorentzschen Transformationen, ein einziges Koordinatensystem als das vernünftige oder das physikalisch ausgezeichnete Koordinatensystem festzulegen und damit die vernünftigen Geraden und die vernünftige Teilung der Geraden eindeutig zu definieren.

Es könnte auf den ersten Blick so scheinen, als ob das nicht der Fall wäre. Schwarzschild, der zuerst das Gravitationsfeld einer ruhenden kugelig-symmetrischen schweren Masse durch Integration der Einsteinschen Differentialgleichungen (7) des Schwerefeldes berechnete¹⁾, fand, daß auch bei Hinzuziehung der Annahmen, daß

1. alle im Problem vorkommenden Größen von x_4 unabhängig sind,
2. bei Annahme eines Polarkoordinatensystems alle Größen nur vom Radiusvektor abhängen,
3. das Potential in großen Entfernungen vom Gravitationszentrum in den skalaren Wert 1 ($g_{ik} = \delta_i^k$) übergeht,

doch immer noch Willkürlichkeiten bleiben, daß also durch diese Bedingungen immer das Koordinatensystem noch nicht festgelegt ist. Zunächst fügt Schwarzschild deswegen ohne besondere Begründung noch die weitere Annahme $g_{h4} = 0$, $h = 1, 2, 3$, hinzu, deren Bedeutung wir im folgenden einsehen werden. Dann bleibt immer noch eine willkürliche Konstante in der Lösung. So ergibt sich für die 4-4-Komponente:

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}},$$

wo über a noch ganz willkürlich verfügt werden darf.²⁾ Setzt man $a = 0$, so wird der Wert g_{44} mit dem oben von uns als sehr gute Annäherung gefundenen Wert

1) K. Schwarzschild, Ber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 186.

2) Übrigens bekommt Schwarzschild diese spezielle Form der Funktion von r nur deswegen, weil er verlangt, daß die Determinante g konstant den Wert 1 habe. Läßt man diese durch nichts begründete Forderung fallen, so findet man für g_{44} eine ganz willkürliche Funktion von r , die nur der einen Beschränkung unterworfen ist, daß sie überall äußerst wenig von $1 - a/r$ abweicht.

$$g_{44} = 1 - \frac{a}{r}$$

identisch. Mit den praktischen Messungen sehr wohl vereinbar wäre es aber auch, wenn a nur eine Länge bedeutet, die gegen r sehr klein ist. Schwarzschild setzt beispielsweise $a = a$, was deswegen möglich ist, weil a die Dimension einer Länge hat und a/r praktisch immer äußerst klein gegen 1 ist. Dagegen rechnet Hilbert¹⁾ mit der Lösung $a = 0$, welche den Vorteil der größeren Einfachheit hat. Beide Lösungen unterscheiden sich also nur durch eine etwas verschiedene Wahl der richtigen Netzknoten, an denen die unkorrigierten natürlich konstruierten raumartigen Koordinatenlinien dicht vorbeikreuzen.

5. So ist die Sachlage denn im höchsten Grade unbefriedigend, da man gar nichts darüber weiß, nach welchem Prinzip denn eigentlich das Koordinatennetz, in welchem sich $a = a$, und das, in welchem sich $a = 0$ ergibt, gewählt ist.

Offenbar genügt es nicht, wenn man nur verlangt, daß das Koordinatensystem so gewählt wird, daß alle nicht im objektiven Tatbestand begründeten Unregelmäßigkeiten ausgeschlossen sind. Unsere Vernunft verlangt weiter noch, daß wir im Besitz eines einheitlichen Prinzips zur Konstruktion des Koordinatensystems sind, welches wir anwenden können, ohne von vorneherein zu wissen, welche Symmetrieeigenschaften das Gravitationsfeld etwa haben mag, und welches ganz von selber zu einem vernünftigen, durch den objektiven Tatbestand begründeten Weltbild führt.

Ein allgemeines Prinzip der Konstruktion von Koordinatennetzen, welches diese Bedingung erfüllt, habe ich in meinen Göttinger Vorträgen angegeben.²⁾ Ich bin freilich nicht imstande zu beweisen, daß es das einzig mögliche brauchbare Konstruktionsprinzip sei. Es lautet folgendermaßen: Wenn man die natürlich konstruierten Geraden als kürzeste Verbindungen zweier ihrer Punkte auffaßt und wenn man die natürlich gewonnene Teilung von Längen und Zeiten, ohne sie zu korrigieren, als richtig ansieht, also auch überall mit konstanter Lichtgeschwindigkeit (gleich 1) rechnet, so kann

1) D. Hilbert, Nachr. d. Kgl. Ges. d. W. zu Göttingen, math.-phys. Klasse vom 23. Dezember 1916. S. 18.

2) G. Mie, Physik. Zeitschr. 18. S. 601. 1917.

man die vierdimensionale Raum-Zeit als ein geometrisches Gebilde auffassen, in welchem eine ganz allgemeine Riemannsche Geometrie an die Stelle der speziellen Minkowskischen Geometrie getreten ist. Es gibt nun einen allgemein gültigen Satz der Geometrie, nach welchem man ein n -dimensionales Gebilde, in welchem eine allgemeine Riemannsche Geometrie herrscht, auffassen kann als ein mehr oder weniger unregelmäßig gekrümmtes Gebilde, welches ganz in einem ebenen Raum von $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ Dimensionen enthalten ist. So kann man die Raum-Zeit mit ihrer durch die Anwesenheit schwerer Massen gestörten Geometrie — ich habe sie in meinen Göttinger Vorträgen als Hilbertsche Welt im Gegensatz zu der Minkowskischen Welt bezeichnet — auffassen als ein gekrümmtes vierdimensionales Gebilde, welches ganz in einem ebenen Raum von 10 Dimensionen enthalten ist. Und zwar müssen wir uns das Hilbertsche Kontinuum als ein Gebilde denken, welches in weiten Strecken fast genau mit einer vierdimensionalen Ebene zusammenfällt, in der die Minkowskische Geometrie gilt. Diese Ebene muß man sich durchzogen denken von vielen ziemlich scharfen Falten oder Rillen, die in zeitartigen Richtungen beiderseits ins Unendliche laufen. Die Falten stellen die Weltröhren der materiellen Teilchen dar, in der Nähe der Falten zeigt das Hilbertsche Kontinuum Abweichungen von der Ebenheit, welche sich als das Gravitationsfeld der Teilchen bemerkbar machen. Wir wollen nun eine vierdimensionale Ebene konstruieren, welche mit den großen ebenen Gebieten des Hilbertschen Kontinuums, die unendlich weit von den Weltröhren der Teilchen entfernt sind, zusammenfällt, und wir wollen ferner in diese vierdimensionale Ebene, welche wir die Koordinatenebene oder auch die physikalische Welt nennen, die Hilbertsche Welt Punkt für Punkt senkrecht hineinprojizieren. Wenn wir dann dieses Abbild der Hilbertschen Welt beschreiben, so beschreiben wir die uns objektiv gegebene Welt jedenfalls richtig. Die Geraden in der Koordinatenebene wollen wir als die vernünftigen Geraden ansehen und ihre Teilung als die vernünftige Teilung. In der Koordinatenebene ist das Koordinatennetz ohne weiteres bis auf die Lorentzschen Transformationen eindeutig definiert und zugleich liefert uns die Projektion in die Koordinatenebene ein vernünftiges Bild der Welt, welches vollkommen auf den ob-

jektiven Tatbestand begründet ist und keine anderen örtlichen oder zeitlichen Unterschiede aufweist, als die objektiv vorhandenen.

Benutzen wir die so definierten Koordinaten zur Numerierung der Raum-Zeitpunkte an Stelle der vorhin mehr oder weniger willkürlich gewählten x_1, x_2, x_3, x_4 , so müssen zwischen den $g_{\mu\nu}$ vier Bedingungsgleichungen bestehen, durch welche die besondere Wahl des Koordinatensystems ausgedrückt wird. Die Willkür in der Wahl der Numerierung der Raum-Zeitpunkte nach der Einsteinschen Gravitationstheorie bringt es mit sich, daß vier von den physikalischen Grundgleichungen sich aus den übrigen ergeben.¹⁾ Die Zahl der selbständigen Gleichungen ist also um vier kleiner als die Zahl der selbständigen Zustandsgrößen, wenn man keine Vorschrift über die Wahl des Koordinatensystems macht. Bei unserer bestimmten Wahl des Koordinatensystems werden die vier fehlenden Grundgleichungen ersetzt durch die vier Bedingungen, welche die Festlegung des Koordinatensystems mit sich bringt. Wahrscheinlich ist es sehr schwer, diese vier Bedingungen allgemein zu formulieren und mit ihnen zu arbeiten. Ich will nun zeigen, daß man das Problem des Gravitationsfeldes einer schweren Kugel lösen kann, ohne die vier Bedingungen explizite zu kennen.

6. Es seien die 10 Koordinaten eines Punktes des Hilbertschen Kontinuums ($x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$), davon seien die vier x die Koordinaten in der „Koordinatenebene“ und die sechs u die Projektionen des Radiusvektors auf die sechs zur Koordinatenebene senkrechten Achsen. Die Gleichungen der „physikalischen Welt“ sind also:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots, \quad u_6 = 0.$$

Das Hilbertsche Kontinuum habe die Gleichungen:

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \dots, \quad u_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Wir wollen das Problem zunächst einschränken auf den Fall der Statik. Dann muß jeder Schnitt $x_4 = \text{const.}$ aus dem Hilbertschen Kontinuum genau dasselbe dreidimensionale Gebilde ausschneiden, ich will es kurz „die dreidimensionale Welt“

1) D. Hilbert, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math.-physikal. Klasse. 20. November 1915. Theorem I. S. 3.

nennen. Keineswegs müssen die Gleichungen des Hilbertschen Kontinuums von x_4 unabhängig sein, aber sie müssen für verschiedene Werte $x_4 = a$ und $x_4 = b$ kongruente Schnitte ergeben. Bezeichnen wir die u -Koordinaten eines Punktes (x_1, x_2, x_3, a) durch u , die des Punktes (x_1, x_2, x_3, b) durch u' , so müssen sich die u' aus den u durch eine orthogonale Transformation ergeben:

$$u'_1 = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \dots + a_{16} u_6$$

$$\dots$$

$$u'_6 = a_{61} u_1 + a_{62} u_2 + \dots + a_{66} u_6.$$

Hier sind also die u Funktionen von (x_1, x_2, x_3, a) , die $a_{\mu\nu}$ sind von den räumlichen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) unabhängig, hängen dafür aber außer von a auch noch von b ab. Wenn wir die Zeit x_4 als einen besonderen Parameter von den anderen Koordinaten aussondern, so können wir sagen: Im Falle des statischen Problems rotiert die dreidimensionale Welt als starres Gebilde um den euklidischen Raum ($u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_6 = 0$), der als Rotationsachse vollkommen in Ruhe bleibt,

Da im Falle eines statischen Problems das Verhalten des Hilbertschen Kontinuums für jeden Wert von x_4 das gleiche sein muß, so muß ferner die Rotationsgeschwindigkeit der dreidimensionalen Welt konstant sein. Um diese Bedingung mathematisch zu formulieren, beachten wir, daß man eine orthogonale Transformation in einem sechsdimensionalen Gebiet durch drei voneinander unabhängige Drehungen in drei aufeinander senkrechten Ebenen beschreiben kann. Eine solche dreifache Drehung läßt sich auffassen als schiefsymmetrischer Tensor mit 15 Komponenten, man könnte sagen als Flächenvektor, das genaue Analogon des sogenannten Sechservektors (Drehung in zwei aufeinander senkrechten Ebenen) im vierdimensionalen Gebiet. Die 15 voneinander unabhängigen Drehungskomponenten reichen ebensowohl zur Beschreibung der orthogonalen Transformation hin, wie die Transformationskoeffizienten $a_{\mu\nu}$ in den oben hingeschriebenen Transformationsformeln. Denn zufolge der Orthogonalitätsbedingungen sind von den $a_{\mu\nu}$ nur 15 voneinander unabhängig.

Ich betrachte nun die infinitesimale Drehung, welche der dreidimensionale Raum in der kleinen Zeit $d x_4$ macht. Das Koordinatensystem der u sei so gelegt, daß in dem Moment

$x_4 = 0$ die drei aufeinander senkrechten Koordinatenebenen (1, 2), (3, 4), (5, 6) gerade mit den drei Drehungsebenen zusammenfallen. Die drei Drehungswinkel seien:

$$\alpha_1 = a_1 \cdot x_4, \quad \alpha_2 = a_2 \cdot x_4, \quad \alpha_3 = a_3 \cdot x_4,$$

wo a_1, a_2, a_3 Konstante sind, also unabhängig von allen vier Koordinaten (x_1, x_2, x_3, x_4). Die Transformationsformeln lauten nun:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 \cdot \cos \alpha_1 + u_2 \cdot \sin \alpha_1, \\ u_2' &= -u_1 \cdot \sin \alpha_1 + u_2 \cdot \cos \alpha_1, \\ u_3' &= u_3 \cdot \cos \alpha_2 + u_4 \cdot \sin \alpha_2, \\ u_4' &= -u_3 \cdot \sin \alpha_2 + u_4 \cdot \cos \alpha_2, \\ u_5' &= u_5 \cdot \cos \alpha_3 + u_6 \cdot \sin \alpha_3, \\ u_6' &= -u_5 \cdot \sin \alpha_3 + u_6 \cdot \cos \alpha_3. \end{aligned}$$

Durch diese Formeln ist die Bedingung von der Konstanz der Rotationsgeschwindigkeiten wiedergegeben. Die Größen u_k hängen nur von x_1, x_2, x_3 ab, die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nur von x_4 .

Wir sind nun imstande, den natürlich gemessenen Abstand ds zweier Punkte des Hilbertschen Kontinuums zu berechnen, von denen der eine durch das Wertesystem (x_1, x_2, x_3, x_4), der andere durch ($x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3, x_4 + dx_4$) charakterisiert ist:

$$ds^2 = \sum dx_i^2 + \sum du_k^2.$$

Die Größen du_k berechnen sich aus den soeben hingeschriebenen Transformationsformeln, beispielsweise:

$$\begin{aligned} du_1 &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \sin \alpha_1 \right) \cdot dx_i \\ &\quad - (u_1 \cdot \sin \alpha_1 - u_2 \cdot \cos \alpha_1) \cdot a_1 \cdot dx_4, \\ du_2 &= - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} \cdot \sin \alpha_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \cdot \cos \alpha_1 \right) \cdot dx_i \\ &\quad - (u_1 \cdot \cos \alpha_1 + u_2 \cdot \sin \alpha_1) \cdot a_1 \cdot dx_4, \\ \text{usw. } i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte du_k in den Ausdruck für ds^2 ein, so sieht man leicht, daß die drei Größen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, welche x_4 enthalten, herausfallen, man bekommt also Koeffizienten, die nur von x_1, x_2, x_3 abhängen:

$$ds^2 = \sum dx_i^2 + \sum dx_i \cdot dx_k \cdot f_{ik}(x_1, x_2, x_3),$$

$$i, k = 1, 2, 3, 4,$$

wo die f_{ik} aus den u_k und ihren Ableitungen zu berechnen sind. Beispielsweise ist:

$$f_{44} = a_1^2 \cdot (u_1^2 + u_2^2) + a_2^2 \cdot (u_3^2 + u_4^2) + a_3^2 \cdot (u_5^2 + u_6^2).$$

7. Wir kommen jetzt zu dem Problem der ruhenden, kugelig-symmetrischen schweren Masse. Dieser Symmetrieforderung wird jedenfalls genügt durch die Bedingung, daß die dreidimensionale Welt, d. h. der Schnitt des Hilbertschen Kontinuums mit einer Ebene $x_4 = \text{const.}$, selber kugelig-symmetrisch sei, daß also die u_k nur von der Länge $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ des vom Symmetriezentrum ausgehenden Radiusvektors abhängen sollen. Man darf vermuten, daß diese Bedingung auch notwendig ist, daß sich also keine Abhängigkeit der u_k von den Winkelkoordinaten des Radiusvektors angeben läßt, bei welcher sich in dem Ausdruck für ds^2 die Winkelkoordinaten in ähnlicher Weise wegheben würden, wie vorhin die Zeitkoordinate x_4 . Einen strengen Beweis vermag ich allerdings für die Notwendigkeit der Bedingung noch nicht zu geben. Wir werden aber sehen, daß der Ansatz, der auf ihrer Annahme beruht, zur Lösung des Problems führt, also zur Konstruktion eines Hilbertschen Kontinuums, das die Eigenschaften des Gravitationsfeldes einer Kugel richtig wiedergibt. Auch das spricht für die Notwendigkeit der Bedingung, weil andernfalls das Hilbertsche Kontinuum nicht eindeutig zu bestimmen wäre. Aus unserer Symmetriebedingung ergibt sich:

$$ds^2 = [dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + f_1(r) \cdot dr^2$$

$$+ 2 \cdot f_2(r) \cdot dr \cdot dx_4 + f_3(r) \cdot dx_4^2],$$

wo f_1, f_2, f_3 leicht aus den $u_k(r)$ und ihren Ableitungen nach r zu berechnen sind.

Setzen wir ein:

$$r \cdot dr = x_1 \cdot dx_1 + x_2 \cdot dx_2 + x_3 \cdot dx_3,$$

so bekommen wir für die Komponenten $g_{\mu\nu}$ des Deformationstensors die folgende Tabelle:

$$(9) \left\{ \begin{array}{llll} 1 + f_1 \cdot \frac{x_1^2}{r^2}, & f_1 \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2}, & f_1 \cdot \frac{x_1 x_3}{r^2}, & f_2 \cdot \frac{x_1}{r}, \\ f_1 \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2}, & 1 + f_1 \cdot \frac{x_2^2}{r^2}, & f_1 \cdot \frac{x_2 x_3}{r^2}, & f_2 \cdot \frac{x_2}{r}, \\ f_1 \cdot \frac{x_1 x_3}{r^2}, & f_1 \cdot \frac{x_2 x_3}{r^2}, & 1 + f_1 \cdot \frac{x_3^2}{r^2}, & f_2 \cdot \frac{x_3}{r}, \\ f_2 \cdot \frac{x_1}{r}, & f_2 \cdot \frac{x_2}{r}, & f_2 \cdot \frac{x_3}{r}, & 1 + f_3. \end{array} \right.$$

Die Determinante des Tensors $g_{\mu\nu}$, die wir wie oben (S. 48) mit g bezeichnen wollen, ergibt sich als:

$$(10) \quad g = (1 + f_1) \cdot (1 + f_3) - f_2^2.$$

Ich will nun die Abkürzungen einführen:

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_1 \cdot (1 + f_3) - f_2^2}{(1 + f_1)(1 + f_3) - f_2^2} = F_1(r), \\ \frac{f_2}{(1 + f_1)(1 + f_3) - f_2^2} = F_2(r), \\ \frac{f_3 \cdot (1 + f_1) - f_2^2}{(1 + f_1)(1 + f_3) - f_2^2} = F_3(r), \end{array} \right.$$

$$(11a) \quad 1 - F_1 = \frac{1 + f_3}{g}, \quad 1 - F_3 = \frac{1 + f_1}{g}, \quad F_2 = \frac{f_2}{g}.$$

Dann ergeben sich für den Tensor $g^{\mu\nu}$, der durch die Gleichungen:

$$g_{r h} \cdot g^{r k} = \delta_h^k$$

definiert ist, die Ausdrücke:

$$(12) \left\{ \begin{array}{llll} 1 - F_1 \cdot \frac{x_1^2}{r^2}, & -F_1 \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2}, & -F_1 \cdot \frac{x_1 x_3}{r^2}, & -F_2 \cdot \frac{x_1}{r}, \\ -F_1 \cdot \frac{x_1 x_2}{r^2}, & 1 - F_1 \cdot \frac{x_2^2}{r^2}, & -F_1 \cdot \frac{x_2 x_3}{r^2}, & -F_2 \cdot \frac{x_2}{r}, \\ -F_1 \cdot \frac{x_1 x_3}{r^2}, & -F_1 \cdot \frac{x_2 x_3}{r^2}, & 1 - F_1 \cdot \frac{x_3^2}{r^2}, & -F_2 \cdot \frac{x_3}{r}, \\ -F_2 \cdot \frac{x_1}{r}, & -F_2 \cdot \frac{x_2}{r}, & -F_2 \cdot \frac{x_3}{r}, & 1 - F_3. \end{array} \right.$$

Nach einer einfachen Rechnung erhält man für die Christoffelschen Ausdrücke (5) folgende Werte:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} h & k \\ \alpha \end{pmatrix} &= \frac{x_\alpha}{r} \cdot \left[\delta_h^k \cdot \frac{F_1}{r} + \frac{1}{2} \frac{x_h \cdot x_k}{r^2} \cdot \left(f_1' \cdot (1 - F_1) - 2 \cdot f_2' \cdot F_2 - \frac{2 \cdot F_1}{r} \right) \right] \\ \begin{pmatrix} h & k \\ 4 \end{pmatrix} &= \delta_h^k \cdot \frac{F_2}{r} - \frac{1}{2} \frac{x_h \cdot x_k}{r^2} \cdot \left(f_1' \cdot F_2 - 2 \cdot f_2' \cdot (1 - F_2) + \frac{2 F_2}{r} \right) \\ \begin{pmatrix} h & 4 \\ \alpha \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot f_3' \cdot \frac{x_\alpha}{r} \cdot \frac{x_h}{r}, \\ \begin{pmatrix} h & 4 \\ 4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot (1 - F_2) \cdot f_3' \cdot \frac{x_h}{r}, \\ \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ \alpha \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} \cdot (1 - F_1) \cdot f_3' \cdot \frac{x_\alpha}{r}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 \end{pmatrix} = +\frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot f_3', \\ h, k, \alpha &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right.$$

In diesen und in den im folgenden noch vorkommenden Gleichungen soll durch den Strich die Differentiation nach r bezeichnet werden. Setzt man die Ausdrücke (6) für die vierzig Komponenten des Gravitationsfeldes $\mathfrak{f}_{\mu\nu}^a$ ein, so findet man:

$$2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}_{\mu\nu}^a}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \alpha \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \begin{pmatrix} \nu & \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \begin{pmatrix} \mu & \alpha \\ \alpha \end{pmatrix},$$

$\mu, \nu, \alpha = 1, 2, 3, 4.$

Hier ist:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mu & \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x_\mu}{r} \cdot (f_1' \cdot (1 - F_1) + f_2' \cdot (1 - F_2) - 2 \cdot f_3' \cdot F_2), \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{g'}{g} \cdot \frac{x_\mu}{r}, \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \ln g}{\partial x_\mu}. \end{aligned}$$

Eine kurze Rechnung ergibt schließlich:

$$(14) \left\{ \begin{aligned} 2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}_{hk}^a}{\partial x_\alpha} &= \left(\delta_h^k - \frac{x_h \cdot x_k}{r^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r \cdot F_1) - \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g} \right) \\ &\quad - \frac{x_h \cdot x_k}{r^2} \cdot \frac{1}{2r^2} \cdot \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_2'}{g} \cdot (1 + f_1) \right) - 2r \cdot \frac{g'}{g} \right], \\ 2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}_{h4}^a}{\partial x_\alpha} &= -\frac{x_h}{r} \cdot \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_2'}{g} \cdot f_3 \right), \\ 2 \cdot \frac{\partial \mathfrak{f}_{44}^a}{\partial x_\alpha} &= -\frac{1}{2r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_2'}{g} \cdot (1 + f_2) \right), \\ h, k &= 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \right.$$

Diese Differentialausdrücke hätte man in einem Raum, der völlig frei von schwerer Masse ist, gleich Null zu setzen. Indessen ist dabei zu bedenken, daß man in einem Raum, wo ein Gravitationsfeld vorhanden ist, zumindest die Energie des Gravitationsfeldes selber hat, und daß diese auch ihren Beitrag zu der schweren Masse liefert. Die Dichtigkeit der dem Gravitationsfeld zukommenden schweren Masse berechnet sich nach Formel (8), wenn man hier für H den auf die Gravitation entfallenden Anteil der Hamiltonschen Funktion der Welt einsetzt. Ich will diesen Anteil G nennen, dann ist in der Einsteinschen Theorie¹⁾

$$(15) \quad G = \frac{1}{2} \cdot \omega^{\mu\nu} \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \beta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu & \beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right)$$

und

$$(16) \quad h_{\mu\nu} = - \frac{\partial G}{\partial \omega^{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \alpha \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \beta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} \nu & \beta \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right)$$

Setzt man hier die Werte (18) ein, so erhält man:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot h_{hk} = \left(\delta_h^k - \frac{x_h x_k}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g} \cdot F_1 \\ \quad + \frac{x_h x_k}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f_1' \cdot f_2'}{g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g' \cdot f_2' \cdot (1 + f_1)}{g^2} \right), \\ 2 \cdot h_{h4} = \frac{x_h}{r} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{f_2' \cdot f_2'}{g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g' \cdot f_2' \cdot f_2}{g^2} \right), \\ 2 \cdot h_{44} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2'^2}{g} - \frac{1}{4} \cdot \frac{g' \cdot f_2' \cdot (1 + f_2)}{g^2} \end{array} \right.$$

Die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^a}{\partial x_a} + h_{\mu\nu} = 0$$

ergeben vier Differentialgleichungen für die f_1, f_2, f_3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r \cdot F_1) - \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g} (1 - F_1) &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_2'}{g} \cdot (1 + f_1) \right) - \frac{f_2' \cdot f_1'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2' \cdot g' \cdot (1 + f_1)}{g^2} - \frac{2 \cdot g'}{r \cdot g} &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_2'}{g} \cdot f_2 \right) - \frac{f_2' \cdot f_2'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2' \cdot g' \cdot f_2}{g^2} &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_2'}{g} \cdot (1 + f_2) \right) - \frac{f_2' \cdot f_2'}{g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_2' \cdot g' \cdot (1 + f_2)}{g^2} &= 0. \end{aligned}$$

1) H. Weyl, a. a. O., S. 189 u. S. 191. Unser G ist gleich $-\frac{1}{2} \mathfrak{G}$ bei Weyl, ferner $\omega^{\mu\nu} = -\sqrt{g} \cdot g^{\mu\nu}$, bei Weyl, vgl. die Fußnote auf S. 48.

oder nach einer einfachen Umformung der drei letzten Gleichungen:

$$(18) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} (r \cdot F_1) - \frac{1}{2r} \cdot \frac{g'}{g} \cdot (1 - F_1) &= 0, \\ \frac{1 + f_1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{\sqrt{g}} \right) - \frac{2 \cdot g'}{r \cdot g} &= 0, \\ \frac{f_3}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{\sqrt{g}} \right) &= 0, \\ \frac{1 + f_3}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \cdot f_3'}{\sqrt{g}} \right) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichungen sind gleichwertig mit den folgenden drei Gleichungen:

$$(19) \quad \frac{dg}{dr} = 0, \quad \frac{d}{dr} (r^2 \cdot f_3') = 0, \quad \frac{d}{dr} (r \cdot F_1) = 0.$$

Mit Rücksicht darauf, daß f_1, f_2, f_3 im Unendlichen verschwinden, ergibt sich aus der ersten Gleichung (19):

$$(20) \quad g = 1.$$

Daraus folgt weiter, weil:

$$1 - F_1 = \frac{1 + f_3}{g} = 1 + f_3, \\ F_1 = -f_3.$$

Die beiden letzten Gleichungen (19) fallen demnach zusammen in die eine Gleichung:

$$\frac{d(r \cdot f_3)}{dr} = 0,$$

deren Lösung ist:

$$(21) \quad f_3 = -\frac{a}{r}, \quad g_{44} = 1 - \frac{a}{r},$$

wo die Integrationskonstante a sich aus der schweren Masse der Kugel berechnet, die nur noch mit einem von den Maßeinheiten abhängigen Faktor zu multiplizieren ist.

8. Zur Berechnung von f_1 und f_2 haben wir die einzige Gleichung:

$$(22) \quad g = (1 + f_1) \cdot (1 + f_3) - f_2^2 = 1.$$

Die gewonnene Lösung enthält noch eine willkürliche Funktion. Die bisher gemachten Annahmen reichen also immer noch nicht ganz aus, um das Koordinatensystem ein-

deutig zu definieren. Woher diese Vieldeutigkeit rührt, erkennt man, wenn man unter $x_4 = \text{const.}$ nicht ein ebenes Kontinuum versteht, sondern einen auf der Koordinatenebene $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots u_6 = 0$ senkrecht stehenden Zylinder, dessen Spur in der Koordinatenebene ein dreidimensionales Kontinuum ist, das zwar rotations-symmetrisch in bezug auf die Achse $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, im übrigen aber ganz beliebig gekrümmt ist. Bei dieser Wahl des Koordinatensystems ergibt sich durch eine leichte geometrische Überlegung für irgend ein Linienelement in der Koordinatenebene die Form:

$$d s'^2 = d x_1^2 + d x_2^2 + d x_3^2 + d x_4^2 + \varphi_1(r) \cdot d r^2 + 2 \varphi_2(r) \cdot d r \cdot d x_4.$$

Für die natürliche Länge eines Linienelementes ds im Hilbertschen Kontinuum bekommt man demnach aus:

$$d s^2 = d s'^2 + \sum d u_k^2,$$

genau dieselbe Form (9), welche wir bisher benutzt haben. In Formel (9) ist demnach noch nicht von der Bedingung Gebrauch gemacht, daß $x_4 = \text{const.}$ eine Ebene sein soll. Diese Bedingung können wir folgendermaßen formulieren: die Projektion des Hilbertschen Kontinuums in der Koordinatenebene muß zu $x_4 = \text{const.}$ beiderseits symmetrisch sein. Denn das ist dann und nur dann der Fall, wenn die $x_4 = \text{const.}$ ebene Kontinua sind. Es müssen also alle geodätischen Linien, die den Raum $x_4 = \text{const.}$ berühren, überhaupt ganz in seinem Inneren verlaufen, und alle geodätischen Linien, die senkrecht auf $x_4 = 0$ stehen, müssen für $+x_4$ und $-x_4$ genau gleich beschaffen sein. Wenn man die Gleichungen (4) also für raumartige Linien aufstellt, für welche in einem Punkt $d x_4 = 0$ ist, so muß sich auch überall $d x_4 = 0$ ergeben, das heißt: für diese Linien muß $d^2 x_4 = 0$ sein, oder:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} \cdot d x_h \cdot d x_k = 0.$$

Nach (13) ergibt sich:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} h & k \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} \cdot d x_h \cdot d x_k = -\frac{1}{2} (f_1' \cdot F_2 - 2 \cdot f_2' \cdot (1 - F_3)) \cdot d r^2.$$

Da $F_2 = f_2$, $1 - F_3 = 1 + f_1$, so muß also sein:

$$(23) \quad (1 + f_1) \cdot f_2' - \frac{1}{2} f_2 \cdot f_1' = 0.$$

Stellt man die Gleichungen (4) für zeitartige Linien auf, so müssen in den Gleichungen für die raumartigen Koordinaten die Glieder mit der ersten Potenz von dx_4 wegfallen, es muß also sein:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} h & 4 \\ a \end{smallmatrix} \right\} \cdot dx_h = 0, \quad a = 1, 2, 3$$

oder, da nach (18):

$$\left\{ \begin{smallmatrix} h & 4 \\ a \end{smallmatrix} \right\} \cdot dx_h = -\frac{1}{2} F_3 \cdot f_3' \cdot \frac{x_a}{r} \cdot dr,$$

so muß sein:

$$(24) \quad f_3 \cdot f_3' = 0.$$

Die beiden Symmetriebedingungen (23) und (24) sind dann, und auch nur dann, erfüllt, wenn:

$$(25) \quad f_3(r) = 0.$$

Damit ist auch die letzte Willkürlichkeit beseitigt, das Koordinatensystem ist nunmehr eindeutig festgelegt. $f_1(r)$ berechnet sich aus $g = (1 + f_1) \cdot (1 + f_3) = 1$. Wir haben nun:

$$(26) \quad f_1 = \frac{\frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}}, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -\frac{a}{r},$$

$$(27) \quad F_1 = \frac{a}{r}, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -\frac{\frac{a}{r}}{1 - \frac{a}{r}}.$$

Vergleichen wir diese Formeln mit dem Schwarzschild'schen Integral, so sehen wir, daß in unserem Koordinatensystem die willkürliche Konstante a zu Null bestimmt wird, es ist das der von Hilbert bevorzugte Wert.

9. Schwarzschild macht für den natürlich gemessenen Abstand ds zweier unendlich benachbarter Raum-Zeitpunkte den Ansatz¹⁾:

$$ds^2 = F \cdot dt^2 - G \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2) - H \cdot r^2 \cdot dr^2.$$

Vergleicht man hiermit unseren Ansatz auf Seite 65:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 + f_1 \cdot dr^2 + 2f_2 \cdot dr \cdot dx_4 + f_3 \cdot dx_4^2,$$

1) K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Kgl. Preuß. Ak. d. W. Berlin 1916. S. 191. Formel (6).

so findet man, abgesehen von der Wahl des Vorzeichens, völlige Übereinstimmung, wenn man setzt:

$$\begin{aligned} f_3 &= 0, \\ H &= \frac{f_1}{r^2}, \\ F &= 1 + f_3, \\ G &= 1. \end{aligned}$$

Da sich bei Schwarzschild

$$G = \frac{\sqrt{(r^2 + a^2)^2}}{r^2}$$

ergibt, so erkennt man, daß die Annahme $G = 1$ schon den Wert $a = 0$ involviert. Die Annahme $G = 1$ ergibt sich aber in meinem Ansatz deswegen mit Notwendigkeit, weil die Projektion der Verbindungslinie ds zweier Punkte des Hilbertschen Kontinuums, welche in dem Schnitt mit einer Ebene $u_1 = c_1$, $u_2 = c_2$, ... $u_6 = c_6$ liegen, auf die Koordinatenebene $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, ... $u_6 = 0$, denselben Wert ds haben muß, wie die Verbindungslinie selbst. Würden wir für die Projektion den Wert ds' annehmen, wo:

$$ds'_1 = \frac{ds}{\sqrt{G}},$$

so würde sich der Schwarzschildsche Ansatz ergeben. Wegen der Symmetrieverhältnisse schneidet die zur Koordinatenebene parallele Ebene $u_1 = c_1$, ... $u_6 = c_6$ aus der Hilbertschen Welt eine zweidimensionale Kugelfläche $r = \text{const.}$, $x_4 = \text{const.}$ aus. Man erkennt das sofort, wenn man setzt:

$$\sum du_k^2 = f_1 \cdot dr^2 + f_3 \cdot dx_4^2 = 0.$$

Um zu dem Schwarzschildschen Maß für die Projektion zu kommen, muß man den Wert des Radius dieser Kugel, dessen natürlich gemessene Länge ich mit Schwarzschild R nennen will, zu

$$r = \frac{R}{\sqrt{G}}$$

rechnen, denn dann ist

$$ds' = \frac{ds}{\sqrt{G}}.$$

Setzt man ein:

$$\sqrt{G} = \frac{\sqrt[3]{r^3 + a^3}}{r},$$

so erhält man:

$$R = \sqrt[3]{r^3 + a^3}$$

oder:

$$r = \sqrt[3]{R^3 - a^3}.$$

Um zu dem Koordinatensystem zu kommen, welches der Schwarzschild'schen Lösung zugrunde liegt, verfahren wir also zuerst genau nach dem von mir angegebenen Prinzip: wir projizieren das Hilbert'sche Kontinuum senkrecht auf die Koordinatenebene $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots u_6 = 0$. Dann aber rechnen wir in der Koordinatenebene nicht mit den natürlichen Längen, sondern wir rechnen so, als ob ein Punkt, der vom Koordinatenanfang natürlich gemessen die raumartige Entfernung R hat, nur um $r = \sqrt[3]{R^3 - a^3}$ von ihm entfernt sei.

Man muß also, um zu der Schwarzschild'schen Lösung zu kommen, der Koordinatenebene rein willkürlich eine recht unvernünftige nichteuklidische Geometrie verleihen.

Übrigens kommt man zu einem Integral der Einsteinschen Differentialgleichungen auch dann, wenn man setzt $G = 1 + \varphi(r)$, wo $\varphi(r)$ eine ganz beliebige Funktion von r ist, deren Größe wir aber immer als „äußerst klein gegen 1“ ansehen wollen.¹⁾

Ergebnisse.

1. Nach der Einsteinschen Gravitationstheorie ist es unmöglich, in einem Gravitationsfeld die „natürlich“ konstruierten raumartigen und zeitartigen Geraden zum Bau eines Koordinatensystems zu verwenden, weil sich die natürlichen Geraden im allgemeinen nicht in Netzknoten schneiden, sondern an den Knotenstellen vorbeikreuzen.

2. Wenn man eine beliebige Numerierung der Raum-Zeitpunkte annimmt, so ergeben sich nach dem Prinzip der allgemeinen Transformierbarkeit, welches der Einsteinschen

1) Vgl. S. 59, Fußnote 1.

Theorie zugrunde liegt, zwar stets die physikalischen Grundgleichungen in derselben einfachen Form, aber eine ungeeignete Wahl des Koordinatensystems kann es mit sich bringen, daß in ihm scheinbar physikalische Unterschiede, Bewegungsvorgänge oder auch Wellen auftreten, die nicht wirklich im objektiven Tatbestand begründet sind, sondern nur der Wahl des unvernünftigen Koordinatensystems ihr Dasein verdanken.

3. Es wird in dieser Arbeit ein Prinzip zur praktischen Ausführung eines stets vernünftigen Koordinatennetzes und damit zur praktischen Bestimmung von geraden Linien und ihrer Teilung angegeben, so daß man also niemals zu Widersprüchen mit der Forderung der Vernunft kommt, daß keinerlei zeitliche Veränderungen oder örtliche Unterschiede in der physikalischen Beschreibung der Welt vorkommen dürfen, die nicht wirklich im objektiven Tatbestand begründet sind.

4. Es wird gezeigt, daß bei dieser vernunftgemäßen Wahl des Koordinatennetzes das Gravitationsfeld einer kugelförmigen schweren Masse eindeutig bestimmt ist. Die willkürliche Konstante, oder die willkürliche Funktion, die in dem von Schwarzschild gefundenen Integral noch vorkommt, wird als Null bestimmt. Schon Hilbert hat die Null dem von Schwarzschild angenommenen positiven Wert vorgezogen, jedoch nur aus dem Grunde, weil der Ausdruck für das Gravitationspotential dadurch einfacher wird. Nach meiner Untersuchung kommt man notwendig zu diesem Integral, wenn man das Koordinatensystem vernünftig wählt.

5. Um zu der Schwarzschildschen oder überhaupt irgend einer anderen Lösung zu kommen, muß man der Wahl des Koordinatennetzes eine ganz unvernünftige nichteuklidische Geometrie zugrunde legen.

Halle a. S., Physik. Institut, d. 17. September 1919.

(Eingegangen 21. September 1919.)

3. Zum Problem der Zustandsgleichung; von C. Dieterici.

In der vorliegenden Arbeit kommt es mir zunächst darauf an, aus den Druckisothermen verschiedener Substanzen tatsächlich bestehende Gesetzmäßigkeiten hervorzuheben, welche bisher nicht oder nicht scharf genug in ihren Folgerungen für die Frage nach der Bildung der Zustandsgleichung bemerkt sind. Ich werde diese Folgerungen dann soweit verfolgen, wie es heute möglich ist; eine endgültige Lösung des Problems der Zustandsgleichung ist noch nicht erreichbar.

Das Beobachtungsmaterial, auf welches sich die folgende Untersuchung stützt, sind die Beobachtungen S. Youngs¹⁾ am Isopentan und diejenigen Amagats²⁾ an Kohlensäure und Äthylen. Im späteren Verlauf der Arbeit werden noch die umfangreichen Beobachtungen S. Youngs³⁾ über die Sättigungsdrucke und Volumina von Substanzen herangezogen.

§ 1. In Tab. 1⁴⁾ ist die kritische Druckisotherme des Isopentans unter p wiedergegeben. Eine Aufzeichnung in p - v -Blatt ergibt den bekannten Verlauf, der von großen Werten von p bei kleinem v stark abfällt, bei v_k einen Sattelpunkt hat, dann wieder erst langsam, dann schneller abnimmt, um schließlich sich dem Nullwert bei $v = \infty$ zu nähern.

Fragt man, wie bei T_k $\partial p / \partial v$ verlaufen muß, so ist aus Tab. 1 ersichtlich, daß $\partial p / \partial v$ in dem Volumenintervall

1) S. Young, Zeitschr. f. phys. Chem. **20**, S. 193–241. 1899.

2) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) **29**, S. 68–136. 1893.

3) S. Young, Proc. Dublin Soc. **12**, S. 374–443. 1910.

4) In allen nachfolgenden Zahlenangaben ist die Gaskonstante pro Gramm

$$R = \frac{1,985}{M} \text{ cal/}^\circ\text{C}$$

gesetzt, wo M das Molekulargewicht ist. Das mechanische Wärmeäquivalent wird gleich 427,4 gm/cal. gesetzt. Die in mm Hg angegebenen Drucke sind durch Multiplikation mit 0,00003181 in cal/cm² umgewandelt.

Tabelle 1.

Kritische Isothermen des Isopentans C_5H_{12} $M = 72,10$.

$$T_k = 460,8^\circ C. \quad R = 0,02753 \text{ cal/}^\circ C \quad R T_k = 12,686 \text{ cal} \quad \frac{p_k v_k}{R T_k} = 3,735.$$

$v \text{ cm}^3$	$p \frac{\text{cal}}{\text{cm}^3}$	$\frac{\partial p}{\partial v} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^6}$	$\frac{p}{v} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^6}$	$\frac{p v}{R T_k}$	$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v$ cal/cm ³ °C	$\left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p\right)$ cal/cm ³	$\frac{1}{p} \frac{\partial U}{\partial v}$
2,4	1,5612		0,6505	0,2954	0,04042	17,064	10,930
2,5	1,2902	- 2,243	0,5161	0,2542	0,03616	15,371	11,914
2,6	1,1127	- 1,478	0,4273	0,2281	0,03196	13,610	12,281
2,7	0,9947	- 0,961	0,3680	0,2117	0,02820	12,000	12,064
2,8	0,9206	- 0,6125	0,3287	0,2032	0,02562	10,885	11,823
2,9	0,8722	- 0,4075	0,3009	0,1994	0,02330	9,864	11,310
3	0,8417	- 0,275	0,2806	0,1990	0,02037	8,542	10,149
3,2	0,8108	- 0,106	0,2530	0,2045	0,01837	7,654	9,440
3,4	0,7994	- 0,035	0,2350	0,2143	0,01649	6,800	8,506
3,6	0,7968	- 0,008	0,2215	0,2261	0,01477	6,009	7,541
3,8	0,7962	- 0,003	0,2094	0,2385	0,01346	5,406	6,790
4	0,7959	- 0,001	0,1990	0,2510	0,012305	5,217	6,55
4,268	0,7956	- 0,0000	0,1864	0,2678	0,01273	5,070	6,373
5	0,7949	- 0,0018	0,1590	0,3133	0,01115	4,029	5,069
6	0,7902	- 0,0089	0,1317	0,3737	0,00840	3,094	3,916
8	0,7542	- 0,0233	0,0943	0,4757	0,00579	1,914	2,538
10	0,7011	- 0,0288	0,0701	0,5527	0,00414	1,207	1,721
12	0,6457	- 0,0265	0,0538	0,6108	0,00334	0,893	1,383
15	0,5719	- 0,0231	0,0383	0,6763	0,00255	0,603	1,054
20	0,4721	- 0,0168	0,236	0,7443	0,00185	0,381	0,807
30	0,3469	- 0,0106	0,0116	0,8204	0,00110	0,160	0,461
30	0,2726	- 0,0049	0,0066	0,8596	0,00078	0,086	0,315
60	0,1909	- 0,0027	0,0031	0,9029	0,00048	0,030	0,157
80	0,1468	- 0,0017	0,0018	0,9255	0,00037	0,023	0,157
100	0,1190	- 0,0011	0,0012	0,9381	0,00029	0,015	0,126
∞	0	- 0,0000	0,0000	1	0,00000	0,000	

vom kleinsten v bis v_k von sehr großen negativen Werten bis zum Nullwert bei v_k zunimmt. Da $\partial p / \partial v$ alle Werte von großen negativen Werten bis zur Null kontinuierlich durchläuft, muß also auch ein Wert $(\partial p / \partial v)_m$ auftreten, bei dem

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m = - \left(\frac{p}{v}\right)_m$$

ist; denn p/v nimmt von großen Werten anfangend nur bis zu dem in der Tabelle angegebenen immer noch positiven Wert $(p/v)_k$ ab. Daher muß bei einem bestimmten Volumen v_m ein Wert auftreten, bei dem

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_m = -\left(\frac{p}{v}\right)_m$$

ist. Die Tab. 1 zeigt diesen Wert bei dem Volumen 8 cm^3 .¹⁾
Bei v_k ist

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_k = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_k = 0,$$

die Druckisotherme hat ihren Sattelpunkt. In dem Volumenintervall zwischen v_k und $v = \infty$ hat die Größe $(\partial p / \partial v)$ sowohl bei v_k wie bei $v = \infty$ den Wert 0, dazwischen aber ist sie negativ, folglich muß notwendig ein Volumen auftreten, bei dem $\partial p / \partial v$ ein negatives Maximum hat. Die Tabelle ergibt dieses Volumen bei $v = 10 \text{ cm}^3$. Der gesamte Verlauf der Kurve, welche bei $T_k (\partial p / \partial v)$ als Funktion von v darstellt, ist in Fig. 1 wiedergegeben, durch eine Kurve, welche stets

Verlauf von $\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T_k}$ und $-\frac{p}{v}$ bei T_k .

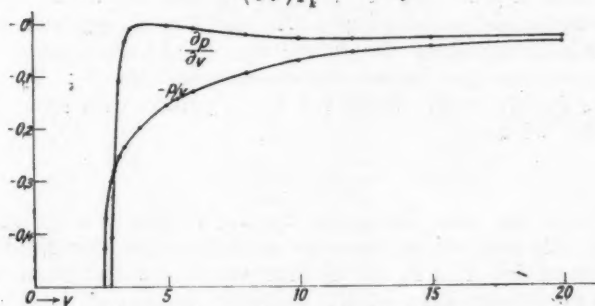


Fig. 1.

negativ ist, ein Maximum bei v_k und ein Minimum ergibt. Die Lage des Volumens v_m , bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v}$$

ist, ergibt die Zeichnung genauer bei $v_m = 2,95 \text{ cm}^3$, so daß also

$$\frac{v_m}{v_k} = \frac{2,95}{4,268} = 0,6912$$

1) L. Schames, Ann. d. Phys. 57. S. 321—346. 1916, bezeichnet diesen Punkt als Boylepunkt.

ist und die Lage des zweiten Minimum ist genauer

$$v = 11,50 \text{ cm}^3 = 2,5 v_k.$$

Die Festlegung dieser zwei ausgezeichneten Punkte in dem Verlauf von $\partial p / \partial v$ ist deshalb von Wichtigkeit, weil man damit zur Bestimmung der Konstanten in einer Zustandsgleichung nicht mehr auf den kritischen Doppelpunkt allein angewiesen ist, sondern noch zwei ausgezeichnete Punkte in der kritischen Isotherme zur Verfügung hat, den ersten bei v_m , wo

$$\frac{\partial p}{\partial v} = - \frac{p}{v}$$

ist, und noch einen zweiten, in dem zwar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

ist, aber $\partial p / \partial v$ negativ ist. Beide sind durch die Beobachtungen sicher festgelegt. Die für $T = T_k$ gegebene graphische Darstellung der Kurve für $\partial p / \partial v$ läßt sofort erkennen, wie der Verlauf derselben GröÙe bei $T > T_k$ und $T < T_k$ sein muß. Denn bei $T > T_k$ findet sich stets eine Stelle, bei der

$$\frac{\partial p}{\partial v} = - \frac{p}{v}$$

ist, aber das erste Maximum der $\partial p / \partial v$ -Kurve steigt nicht mehr bis zum Werte 0, sondern bleibt unter der Nulllinie. Während bei $T < T_k$ die Nulllinie durch das Maximum von $\partial p / \partial v$ überschritten wird. Demnach müÙten sich bei den unteren Isothermen fünf ausgezeichnete Volumina finden, eines bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = - \frac{p}{v}$$

ist, zwei Volumina, in denen

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0$$

ist und zwei, in denen $\partial p / \partial v$ ein Maximum und ein Minimum hat. Diese Volumina liegen alle im Zweiphasengebiet und sind der unmittelbaren Beobachtung nicht zugänglich. Bei der kritischen Isotherme fallen die drei mittleren ausgezeichneten Punkte im kritischen Doppelpunkte zusammen, bei den oberen

Isothermen schieben sich die drei verbleibenden ausgezeichneten Werte von $\partial p / \partial v$ immer mehr zusammen, um bei genügend hoher Temperatur beim Übergang in den idealen Gaszustand ganz zu verschwinden.

Das Volumen v_m , bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = - \frac{p}{v}$$

ist, findet man am sichersten, indem man bei verschiedenen Temperaturen die Kurve aufzeichnet, welche $p v / R T$ oder das Verhältnis $v : v_0$ des tatsächlichen zum „idealen“ Gasvolumen darstellt. In den folgenden Tab. 2a, 2b, 2c ist diese Größe für die kritische und einige obere und untere Isothermen für Isopentan, Kohlensäure und Äthylen wiedergegeben und

Tabelle 2a.

$p v / R T$ für Isopentan bei verschiedenen T und v .

$R = 0,02753 \text{ cal/}^\circ\text{C.}$

$v \text{ cm}^3$	$T = 493$	473	460,8	453	443
2,4			0,2954	0,2412	0,1694
2,5		0,3332	0,2542	0,2045	0,1370
2,6		0,3016	0,2281	0,1816	
2,7		0,2802	0,2117	0,1685	
2,8		0,2674	0,2032	0,1630	
2,9	0,3536	0,2599	0,1994		
3	0,3487	0,2566	0,1990		
3,2	0,3418	0,2569	0,2045		
3,4	0,3422	0,2629	0,2143		
3,6	0,3474	0,2721	0,2261		
3,8	0,3554	0,2899	0,2385		
4	0,3646	0,2945	0,2510		
4,268	0,3760	0,3090	0,2678		
5	0,4170	0,3549	0,3133		
6	0,4690	0,4126	0,3737		
8	0,5550	0,5083	0,4757	0,4536	
10	0,6194	0,5804	0,5527	0,5344	
12	0,6685	0,6352	0,6108	0,5960	
15	0,7232	0,6950	0,6763	0,6627	0,6452
20	0,7812	0,7596	0,7443	0,7349	0,7218
30	0,8455	0,8298	0,8204	0,8138	0,8039
40	0,8794	0,8665	0,8596	0,8551	0,8482
60	0,9138	0,9063	0,9029	0,8997	0,8959
80	0,9360	0,9295	0,9255	0,9225	0,9204
100	0,9475	0,9414	0,9381	0,9350	0,9340
	1	1	1	1	1

Tabelle 2b.¹⁾

$p v / R T$ für Kohlensäure bei verschiedenem T und v .
 $R = 0,04516 \text{ cal/}^\circ\text{C.}$

$T = 293$		$T = 303$		$T = 313$	
$v \text{ cm}^3$	$p v / R T$	v	$p v / R T$	v	$p v / R T$
12,149	0,7767	11,594	0,7934	11,76	0,8042
11,250	0,7600	10,939	0,7727	10,052	0,7733
10,053	0,7344	9,271	0,7367	9,200	0,7550
8,673	0,6967	8,414	0,7133	8,684	0,7424
8,354	0,6865	7,895	0,6971	7,976	0,7228
7,491	0,6567	7,169	0,6711	7,534	0,7084
		6,723	0,6531		
6,927	0,6325	5,671	0,6009	6,554	0,6723
6,122	0,5925	4,662	0,5352	5,690	0,6322
5,603	0,5628	4,007	0,4813	5,206	0,6052
5,321	0,5442	3,420	0,4228	4,897	0,5860
				4,162	0,5338
1,320	0,1877	1,650	0,2069	3,438	0,4702
1,290	0,1414	1,578	0,2006		
		1,507	0,1970	3,125	0,4380
		1,487	0,1970	2,606	0,3788
		1,440	0,1983	1,930	0,2969
		1,417	0,2001	1,684	0,2734
				1,574	0,2691
				1,450	0,2726

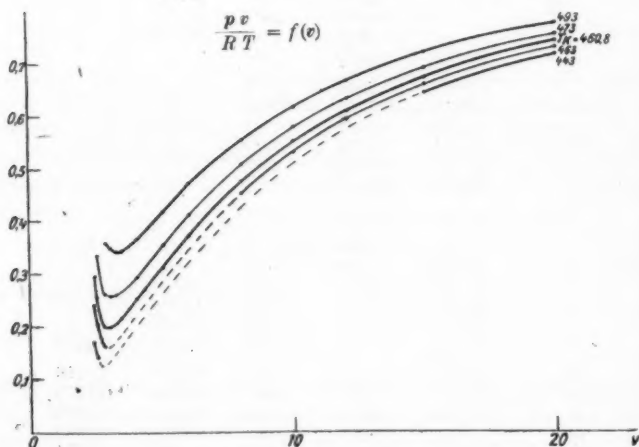


Fig. 2.

1) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) 29. S. 110—111. 1893.

Tabelle 2c.¹⁾

$p v / R T$ für Äthylen bei verschiedenen T und v . $R = 0,071 \text{ cal/}^\circ\text{C}$.

$T = 273$		$T = 278$		$T = 283$		$T = 293$		$T = 303$	
v	$p v / R T$	v	$p v / R T$	v	$p v / R T$	v	$p v / R T$	v	$p v / R T$
14,10	0,6340	13,67	0,6373	13,995	0,6579	13,95	0,6820	11,70	0,6586
13,34	0,6165	12,32	0,6044	13,38	0,6449	12,42	0,6503	10,24	0,6221
12,89	0,5955	10,92	0,5627	12,14	0,6145	11,90	0,6373	8,271	0,5582
10,67	0,5330	10,18	0,5372	10,97	0,5817	10,07	0,5860	6,773	0,4955
		9,366	0,5057	9,78	0,5422	9,197	0,5567	5,523	0,4352
		8,468	0,4684						
3,143	0,1610			8,465	0,4896	8,315	0,5227	4,641	0,3874
2,992	0,1570			7,677	0,4534	7,482	0,4877	3,992	0,3595
2,941	0,1580	3,289	0,1856	6,723	0,4052	6,630	0,4477	3,482	0,3527
2,910	0,1600	3,150	0,1817	4,552	0,2798	5,736	0,4006	3,226	0,3631
2,862	0,1645	3,093	0,1822	3,694	0,2315	4,076	0,3084		
2,827	0,1695	3,062	0,1841	3,394	0,2209				
						3,556	0,2896		
2,809	0,1755	3,042	0,1866	3,245	0,2190	3,319	0,2896		
2,786	0,1810	2,994	0,1910	3,153	0,2204	3,167	0,2949		
2,701	0,2055	2,930	0,2013	3,088	0,2233	2,997	0,3140		
2,587	0,2425	2,861	0,2106	2,833	0,2561	2,882	0,3354		
2,566	0,2565	2,705	0,2489	2,786	0,2687				
2,481	0,3100			2,645	0,3188				

für den ersten Stoff in Fig. 2 dargestellt. Da

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{p v}{R T_k} \right) = \frac{1}{R T_k} \left(v \frac{\partial p}{\partial v} + p \right)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{p v}{R T_k} \right) = \frac{1}{R T_k} \left(2 \frac{\partial p}{\partial v} + v \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)$$

ist, folgt, daß bei T_k dasjenige Volumen, bei dem

$$\frac{\partial p}{\partial v} = - \frac{p}{v}$$

ist, dasjenige ist, bei dem die Größe $p v / R T_k$ ein Minimum hat. Dieses Volumen v_m findet sich hier noch sicherer als aus den Differentialquotienten bei $v = 2,95 \text{ cm}^3 = 0,6912 v_k$. Mit steigender Temperatur verschiebt sich, wie die Kurvendarstellung erkennen läßt, die Lage des Minimums, wenn auch nur wenig, nach größerem Volumen und ebenso deutet der Verlauf der Größe $p v / R T$ bei niederen Temperaturen darauf hin, daß im Zweiphasengebiet die Lage des Minimums bei kleinerem Volumen als bei T_k zu suchen ist.

1) E. H. Amagat, Ann. chim. phys. (6) 29. S. 113. 1893.

Annalen der Physik. IV. Folge. 62.

Im kritischen Punkt ist

$$\frac{\partial p}{\partial v} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

und folglich hat bei v_k die Kurve, welche das Verhältniß

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p v}{R T_k}$$

darstellt, ihren Wendepunkt und zwar ist hier ihre maximale Neigung

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{p v}{R T_k} \right) = \frac{p_k}{R T_k} = \frac{1}{v_{0k}} = s_{0k}$$

gleich der „idealen“ Gasdichte.

Bei höheren Temperaturen verschiebt sich auch die Stelle, an der die Kurve $p v / R T$ ihren Wendepunkt hat nach größerem Volumen. Bei niederen Temperaturen ist eine sichere Aussage über die Lage des Wendepunktes nicht möglich.

In bezug auf den Verlauf der Größe $p v / R T$ bei Kohlensäure und bei Äthylen sei hervorgehoben: Kohlensäure zeigt in der Isotherme von 30°C das Minimum von $p v / R T$ bei $v_m = 1,49 \text{ cm}^3$. In der kritischen Isotherme bei $31,35^\circ \text{C}$ kann das Minimum von $p v / R T$ nicht merklich verschieden sein. Das kritische Volumen ist $v_k = 2,155 \text{ cm}^3$, so daß auch hier wieder

$$\frac{v_m}{v_k} = \frac{1,49}{2,155} = 0,6914$$

ist. Bei Äthylen findet sich bei der kritischen Temperatur 10°C das Volumen v_m des Minimums von $p v / R T$ bei $v_m = 3,20 \text{ cm}^3$; das kritische Volumen v_k ist leider nicht so scharf bestimmt, annähernd ist $v_k = 4,55 \text{ cm}^3$. Daraus ergibt sich hier $v_m = 0,703 v_k$. Wie es scheint, steht also dasjenige Volumen, in dem bei T_k die Größe $p v / R T$ ein Minimum hat, in einem bestimmten konstantem Verhältniß zu v_k und es ist:

$$v_m : v_k = 0,6912 = \ln 2, \text{ also } \frac{v_m}{v_k} = 2.$$

Im übrigen zeigen auch die Kurven, welche für Kohlensäure und Äthylen die Größe $p v / R T$ darstellen, daß auch bei diesen Stoffen sich die Lage des Minimums mit steigender Temperatur langsam nach größerem Volumen verschiebt. In allen Stücken tritt ein gleichartiges Verhalten, wie bei Isopentan, auf.

§ 2. Ein ganz anders Verhalten zeigt der Druck in seiner Abhängigkeit von der Temperatur oder der Spannungskoeffizient $(\partial p / \partial T)_v$, für den Young besondere Tabellen gegeben hat. Für die kritische Temperatur ist in Tab. 1 der Spannungskoeffizient verzeichnet und mit ihm sind die durch die Überschriften der einzelnen Spalten gekennzeichneten Rechnungsoperationen ausgeführt. $\partial p / \partial T$ ist stets größer als p/T , so daß, wenn man den Spannungskoeffizienten bei T_k durch

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T} f(v)$$

darstellen wollte, $f(v)$ eine Funktion sein müßte, die mit zunehmender Dichte zunimmt, aber nicht gleichmäßig, sondern bei v_k tritt eine deutliche Verlangsamung der Zunahme mit der Dichte auf. Bei v_k tritt die schon früher bemerkte auffällige Tatsache hervor¹⁾, welche auch Kohlensäure zeigt, daß

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{v_k} = \frac{2R}{v_k}$$

wird, also

$$f(v_k) = 2 \frac{R T_k}{p_k v_k}.$$

Entsprechend zeigt die thermodynamische Größe $\partial U / \partial v$ bei v_k den Wert

$$\frac{1}{v_k} (2 R T_k - p_k v_k).$$

Da der Spannungskoeffizient $\partial p / \partial T$ ähnlich verläuft wie p selbst, insofern beide Größen von $v = \infty$ anfangend beschleunigt mit abnehmendem Volumen wachsen, bei v_k nahezu konstant sind, um dann bei geringeren Dichten wieder weiter zu wachsen, könnte man auf den Gedanken kommen, daß

$$\frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial T} = f(v)$$

eine einfache Gesetzmäßigkeit zeigt. Das ist aber nicht der Fall, denn diese Funktion zeigt ebenso, wie die in Tab. 1 berechnete

$$\frac{1}{p} \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{T}{p} \frac{\partial p}{\partial T} - 1$$

ein ausgesprochenes Maximum beim Volumen $v = 2,6 \text{ cm}^3$.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 12. S. 144—153. 1903.

§ 3. Es soll nunmehr untersucht werden, wie die bisher vorliegenden Formen der Zustandsgleichungen den hier hervorgehobenen Tatsachen entsprechen. Die van der Waals'sche Zustandsgleichung

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

verlangt ja, solange man bei $T = \text{konst.}$ die Größen a und b als konstant ansieht, die Bestimmung

$$b = \frac{1}{3} v_k, \quad a = \frac{8}{3} R T_k v_k.$$

Wie diese Gleichung die tatsächlichen Beobachtungen wiederzugeben vermag, ist wohl am übersichtlichsten und kürzesten durch die Tab. 8 dargestellt, in der die nach van der Waals ausgeführte Berechnung mit der Beobachtung verglichen ist.

Tabelle 8.

Kritische Isotherme des Isopentans berechnet nach van der Waals.
 $R T_k = 12,686$; $a = \frac{8}{3} R T_k v_k = 60,912 \text{ cal} \cdot \text{cm}^3$; $b = \frac{1}{3} v_k = 0,423 \text{ cm}^3$.

v	$p \frac{\text{cal}}{\text{cm}^3}$		$\frac{\partial p}{\partial v} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^6}$		$\frac{pv}{R T_k}$	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
2,4	2,410	1,5612	- 4,479		0,4559	0,2954
2,5	2,033	1,2902	- 3,141	- 2,243	0,4006	0,2542
2,6	1,767	1,1127	- 2,227	- 1,478	0,3621	0,2281
2,7	1,578	0,9947	- 1,590	- 0,961	0,3358	0,2117
2,8	1,444	0,9206	- 1,141	- 0,613	0,3187	0,2032
2,9	1,346	0,8722	- 0,820	0,408	0,3077	0,1994
3,0	1,276	0,8417	- 0,589	- 0,275	0,3017	0,1990
3,2	1,191	0,8108	- 0,300	- 0,106	0,3004	0,2045
3,4	1,148	0,7994	- 0,146	- 0,035	0,3077	0,2143
3,6	1,127	0,7968	- 0,065	- 0,008	0,3198	0,2261
3,8	1,119	0,7962	- 0,042	- 0,003	0,3352	0,2385
4	1,115	0,7959	0,006	- 0,001	0,3516	0,2510
4,268	1,114	0,7956	- 0,0000	- 0,000	0,3748	0,2678
5	1,111	0,7949	- 0,038	- 0,002	0,4379	0,3133
6	1,080	0,7902	- 0,042	- 0,009	0,5109	0,3737
8	0,977	0,7542	- 0,055	- 0,023	0,6161	0,4757
10	0,870	0,7011	- 0,051	- 0,028	0,6859	0,5527
12	0,7764	0,6457	- 0,036	- 0,026	0,7344	0,6108
15	0,6636	0,5719	- 0,033	- 0,023	0,7845	0,6763
20	0,5306	0,4721	- 0,022	- 0,017	0,8365	0,7443

Daraus ergibt sich: qualitativ ist der Verlauf des Druckes als Funktion von p richtig wiedergegeben, quantitativ aber

nicht; die berechneten Werte von p sind stets erheblich größer als die beobachteten. Damit hängt natürlich auch zusammen, die schon früher¹⁾ bemerkte Tatsache, daß das Verhältnis $p v / R T_z$ im kritischen Punkt keineswegs der Beobachtung entspricht.

Die Lage des Minimums dieses Verhältnisses ergibt die Berechnung bei $v = 3,2 \text{ cm}^3$, während es bei Isopentan bei $v = 2,95 \text{ cm}^3$ beobachtet ist. Es erfüllt also die Berechnung auch nicht die Bedingung, daß $v_m = 2,95 \text{ cm}^3$ ist. Endlich gibt die Berechnung die Lage des Minimums von $\partial p / \partial v$ bei $v = 8 \text{ cm}^3$, während sie bei $v = 10,5$ beobachtet ist. Die Waalssche Gleichung gibt also in der Tat zwar die Möglichkeit, die zwei ausgezeichneten Punkte, in denen

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{p}{v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

wird, auf die im Abschnitt 1 die Aufmerksamkeit gelenkt ist, zu berücksichtigen, aber gibt nicht ihre Lage richtig wieder.

Es liegt natürlich nahe, die vielseitigen Untersuchungen von Lorentz, Boltzmann, Happel²⁾ und neuerdings Holm³⁾ zu berücksichtigen, um die Größe b so als Funktion von v so darzustellen, daß auch die zwei neuen ausgezeichneten Punkte der kritischen Isotherme erfüllt werden. Indessen scheint mir bei diesen Bemühungen ein Punkt übersehen zu sein, der ihren Erfolg in Frage stellt.

Nach den kinetischen Vorstellungen, die allen diesen Untersuchungen zugrunde liegen, kommt eine Molekel, welche aus dem Innern eines Gases oder kondensierten Gases sich zur druckempfindenden Wand bewegt, nicht selbst zu dieser Wand, sondern trifft auf ihrer Fahrt auf andere Molekeln, die den Transport der Bewegungsgröße übernehmen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die jedesmaligen Zusammenstöße bizentrale seien, so wird bei jedem Zusammenstoß eine Strecke gleich dem Durchmesser der Molekeln gespart, es tritt also eine „Förderung der Bewegungsgröße“ ein und die vom Stoß der Molekel zurückgelegte Strecke erscheint kürzer, als der lineare Abstand von der Wand um die Zahl der Kollisionen

1) C. Dieterici, Wied. Ann. **69**. S. 685—705. 1899.

2) H. Happel, Ann. d. Phys. **21**. S. 342—380. 1906.

3) E. A. Holm, Ann. d. Phys. **51**. S. 768—796. 1916.

multipliziert mit dem Durchmesser der Molekeln bei der gemachten vereinfachenden Annahme von bizentralen Zusammenstößen.

Diese einleuchtende Vorstellung ist aber nur dann richtig, wenn man die Molekeln selbst als vollkommen starr ansieht; das ist aber im Widerspruch mit der Grundanschauung der kinetischen Gastheorie, nach denen die Molekeln als vollkommen elastische Körper angesehen werden. Wenn aber die Molekeln elastische Körper sind, so verläßt die getroffene Molekel ihre bisherige Stelle erst um so viel später, als die Zeit ist, welche der elastische Stoß gebraucht, um sich durch den Körper der Molekeln hindurch um die Strecke ihres Durchmessers fortzupflanzen. Es kann also nur eine Förderung der Bewegungsgröße auftreten, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des elastischen Stoßes in der Molekel größer ist als die translatorische Schwerpunktschwindigkeit. Die Verfolgung dieser Vorstellung ist, wenn überhaupt möglich, jedenfalls nur verfolgbar unter neuen Annahmen über die Geschwindigkeit der Stoßfortpflanzung in der Molekel selbst. Sie würde dahin führen die Waalssche Größe b , in anderer Weise, als es schon Reingam tat, als Temperaturfunktion aufzufassen und damit die Möglichkeit geben, auch die Waalssche Gleichung in ihren Folgerungen auf den Spannungskoeffizienten $\partial p / \partial T$, die in keiner Weise mit den Beobachtungen sich decken, mit diesen in Einklang zu bringen. Ich verlasse hier die Waalssche Zustandsgleichung, um so mehr als ein zweiter Weg wesentlich weiter führt.

§ 4. Clausius hat die Vorstellung ausgesprochen, daß im Gleichgewichtszustand zwischen Flüssigkeit und gesättigtem Dampf gleichviel Molekeln aus der Flüssigkeit und koexistenten Dampf ein- und austreten, also in der Oberfläche ein fortgesetzter Austausch der „fortschreitenden, schwingenden und drehenden Bewegung“ eintritt.

Beschränkt man sich entsprechend der Grundanschauung der kinetischen Gastheorie, daß für den Druck nur die Energie der fortschreitenden Bewegung in Betracht kommt, allein auf diese und dehnt die Clausiusschen Vorstellungen aus auf jeden Zustand, den die Substanz annehmen kann, so wird man unter Annahme, daß für alle Zustände die mittlere lebendige Kraft der Schwerpunktsbewegung proportional $R T$ sei,

auf eine Zustandsgleichung

$$p = \frac{RT}{v} e^{-\frac{D}{RT}}$$

geführt, worin D die Durchbruchsarbeit zum kohäsionsfreien idealen Gaszustand bedeutet. Diese Gleichung ist heute auf dem Gebiet der Elektronenemission bekannt. Ich habe früher¹⁾ nachgewiesen, daß, wenn man bei $T = \text{konst.}$

$$\frac{D}{RT} = \frac{a}{v}$$

setzt, und die Waalssche Volumenkorrektion einführt, man durch

$$p = \frac{RT}{v-b} e^{-\frac{a}{v}}$$

eine Zustandsgleichung erhält, die dieselben glücklichen Eigenschaften der Kontinuität hat, wie die Waalssche, und daß die Bedingungen des kritischen Doppelpunktes auf

$$b = \frac{1}{3} v_k, \quad a = 4b = 2v_k$$

führt.

Inwieweit diese Zustandsgleichungen die kritische Isotherme des Isopentans zu berechnen gestattet, zeigt die folgende Tab. 4.

Die berechneten und die beobachteten Werte des Druckes sind, abgesehen von den kleinsten Volumen, faßt durchgängig in überraschend guter Übereinstimmung. Entsprechend gibt auch $p v / R T_k$ fast überall die Beobachtungen gut wieder. Aber, wie auch in der Tabelle kenntlich gemacht ist, gibt die Berechnung das Volumen v_m , wo $p v / R T_k$ ein Minimum hat, oder wo

$$\frac{\partial p}{\partial v} = - \frac{p}{v}$$

ist, nicht genau bei dem Volumen $v_m = 2,95 \text{ cm}^3$, welches die Beobachtungen verlangen, sondern bei $v = 2,80 \text{ cm}^3$; eine zwar kleine, aber doch deutlich erkennbare Differenz. Dagegen zeigt die Tabelle wiederum dasjenige Volumen, wo $\partial p / \partial v$ sein Minimum hat, in Berechnung und Beobachtung gut übereinstimmend bei $v = 10 \text{ cm}^3$.

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 5. S. 51–88. 1901. Vgl. auch Künen, Die Zustandsgleichung. Braunschweig 1907.

Tabelle 4.

Kritische Isothermen des Isopentans, berechnet nach $p_k = \frac{RT}{v-b} e^{-\frac{a}{v}}$.

$RT_k = 12,686 \text{ cal}$; $a = 2v_k = 8,536 \text{ cm}^3$; $b = \frac{1}{2}v_k = 2,134 \text{ cm}^3$.

v	$p \frac{\text{cal}}{\text{cm}^3}$		$\frac{\partial p}{\partial v} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^6}$		$\frac{pv}{RT_k}$		$\frac{p}{v} \frac{\text{cal}}{\text{cm}^3}$	
	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
2,4	1,361	1,561	- 3,100		0,2575	0,2975	0,567	0,651
2,5	1,125	1,290	- 1,537	- 2,243	0,2217	0,2542	0,450	0,516
2,6	1,022	1,113	- 0,902	- 1,478	0,2095	0,2281	0,303	0,427
2,7	0,9485	0,995	- 0,995	- 0,961	0,2019	0,2117	0,351	0,368
2,8	0,9034	0,921	- 0,371	- 0,613	0,1994	0,2032	0,323	0,329
2,9	0,8734	0,8722	- 0,2532	- 0,408	0,1997	0,1994	0,301	0,301
3,0	0,8505	0,8417	- 0,1675	- 0,275	0,2010	0,1990	0,283	0,281
3,2	0,8258	0,8108	- 0,0859	- 0,106	0,2083	0,2045	0,258	0,253
3,4	0,8140	0,7994	- 0,0423	- 0,035	0,2182	0,2143	0,240	0,235
3,6	0,8071	0,7968	- 0,0186	- 0,008	0,2212	0,2261	0,224	0,222
3,8	0,8056	0,7962	0,0072	- 0,003	0,2413	0,2385	0,212	0,209
4,0	0,8043	0,7959	- 0,0016	- 0,001	0,2536	0,2510	0,201	0,199
4,268	0,8046	0,7956	- 0,0000	- 0,000	0,2707	0,2678	0,188	0,1864
6	0,8028	0,7949	- 0,0092	- 0,002	0,3164	0,3133	0,160	0,159
6	0,7907	0,7902	- 0,0187	- 0,009	0,3740	0,3737	0,132	0,132
8	0,7436	0,7542	- 0,0275	- 0,023	0,4689	0,4757	0,093	0,094
10	0,6869	0,7011	- 0,0290	- 0,028	0,5415	0,5527	0,069	0,070
12	0,6305	0,6457	- 0,0267	- 0,026	0,5964	0,6108	0,053	0,054
15	0,5581	0,5719	- 0,0223	- 0,023	0,6599	0,6763	0,037	0,038
20	0,4631	0,4721	- 0,0161	- 0,017	0,7301	0,7443	0,023	0,024

Man wird also zugeben müssen, daß die mit dieser Zustandsgleichung ausgeführte Berechnung einen unvergleichlich besseren Anschluß an die Beobachtungen gibt als die in Tab. 3 nach der Waalsschen Gleichung angestellte und wird daraus die Berechtigung herleiten müssen, die hier aufgestellte Form der Zustandsgleichung weiter zu verfolgen.

Die Unzulänglichkeit auch dieser Zustandsgleichung tritt aber hervor, wenn man den Spannungskoeffizienten berücksichtigt. Denn durch die für $T = T_k$ eingeführte Hypothese für die Durchbrucharbeit D ist

$$\frac{D}{RT_k} = \frac{a}{v}$$

gesetzt, eine Hypothese, die der Waalsschen Annahme über den Kohäsionsdruck nachgebildet ist.

Es liegt nahe, mit van der Waals die Durchbruchsarbeit als eine rein mechanische, von T unabhängige Größe aufzufassen, also allgemein

$$\frac{D}{RT} = \frac{a}{vT}$$

und damit

$$p = \frac{RT}{v-b} e^{-\frac{a}{vT}}$$

anzunehmen. Damit folgt aber sofort, sofern man nur b als unabhängig von T betrachtet, gleichgültig ob und welche Funktion b von v ist,

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{p}{T} + p \frac{a}{vT^2}$$

und

$$\frac{1}{p} \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{1}{p} \left(T \frac{\partial p}{\partial T} - p \right) = \frac{a}{vT}$$

oder bei $T = c$ müßte die Größe

$$\frac{1}{p} \frac{\partial U}{\partial v}$$

mit der Dichte kontinuierlich zunehmen. In Tab. 1 ist aber diese Größe berechnet und schon von vorn darauf hingewiesen, daß zwar die thermodynamische Größe $\partial U / \partial v$ ähnlich verläuft, wie p selbst, daß aber das Verhältnis

$$\frac{1}{p} \frac{\partial U}{\partial v}$$

ein ausgeprägtes Maximum bei $v = 2,6 \text{ cm}^3$ zeigt. Daher läßt sich also nicht die Größe

$$\frac{1}{p} \frac{\partial U}{\partial v}$$

durch eine einfache mit v kontinuierliche abnehmende Funktion darstellen.

§ 5. Durch den Übergang auf den Spannungskoeffizienten und die zusammenhängende Änderung der Gesamtenergie U mit dem Volumen ist aber auch sofort dargetan, daß weder die van der Waalssche noch die von mir auf Grund der Clausiusschen Vorstellungen aufgestellte Zustandsgleichung den Bedingungen des Problems genügen können, denn beide Zustandsgleichungen halten den Grundsatz der kinetischen Gastheorie fest, daß nur die lebendige Kraft der Schwerpunkts-

bewegung der Molekeln für den Druck entscheidend ist, wenn diese auch durch Berücksichtigung der Raumanfüllung und der Kohäsion gegenüber dem idealen Gasdruck verändert ist, daß aber die innere Energie keinen Anteil an dem kinetischen Druck hat. Da aber die mit U bezeichnete thermodynamische Energie in kinetischer Deutung die Energie der gesamten Bewegungszustände umfaßt, also neben der Energie der fortschreitenden Bewegung auch die der „drehenden und schwingenden“ nach Clausius, die in neuerer Zeit als schwingende allein angesehen wird, so muß auch in den Ausdruck für p , also in die Zustandsgleichung, ein Ausdruck aufgenommen werden, der einen Umsatz dieser Bewegungen Rechnung trägt. Gelingt es, durch einen solchen Schritt die endgültige Form der Zustandsgleichung zu finden, so ist damit auch zugleich die thermodynamische Energie U als Funktion von T und v dargestellt, und damit ist gesagt, daß der tiefere Sinn des Problems der Zustandsgleichung darin liegt, durch eine kinetische Vorstellung die Energiefunktion in ihrer Abhängigkeit von T und v darzustellen.

Daß die inneren Bewegungen sich in äußere Arbeit umsetzen können, wissen wir aus den adiabaten Vorgängen idealer Gase, wenn auch bisher die Ausbildung der kinetischen Gastheorie auf Arbeitsprozesse noch fehlt und sich daher die Mechanik des Umsatzes innerer Energie in translatorische nicht übersehen läßt. Es liegt aber im Sinne der Clausius'schen Vorstellungen die Annahme nahe, daß die „befähigten“ Molekeln, welche aus dem Innern an die Grenze zwischen Flüssigkeit und Dampf kommen, mit genügend großer lebendiger Kraft, um die Kohäsion zu überwinden, im dichteren Zustand einen anderen Energiebetrag an drehenden und schwingenden Bewegungen haben als im weniger dichten und daß sich die Energiedifferenz in kinetischen Druck umsetzt.

Ich habe versucht, diese Vorstellungen durch den Ansatz

$$p = \frac{RT}{v} x e^{-y} \quad \text{oder} \quad \ln \frac{pv}{RT} = \ln x - y$$

zum Ausdruck zu bringen, worin x und y zwei nach den Beobachtungen zu bestimmende Funktionen von T und v sind. Aber obgleich man in der kritischen Isotherme, die die ausgezeichneten Punkte des Minimums von pv , den kritischen

Doppelpunkt und den zweiten Punkt, in dem

$$\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = 0$$

ist, zur Verfügung hat, ferner auch die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{p v}{R T} = \frac{1}{R T} \left(v \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{1}{v} \right) = \frac{\partial}{\partial v} (\ln x - y)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{p v}{R T} = \frac{1}{p T} \cdot \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial T} (\ln x - y)$$

in ihrem ganzen Verlauf nach den Beobachtungen angebar sind, ist es mir nicht gelungen, in den beiden Funktionen x und y den Umsatz innerer Energie in translatorische zum Ausdruck zu bringen.

Auch der Versuch, durch Hinzufügen einer weiteren Funktion von v durch

$$p = \frac{R T}{v} [x e^{-y} + \varphi(v)]$$

den Umsatz innerer Energie zum Ausdruck zu bringen, schlug fehl, so daß ich mich damit begnügen muß, darauf hinzuweisen, daß ein grundsätzlicher Fortschritt in der Lösung des Problems der Zustandsgleichung nicht durch weiteren Ausbau der Waalsschen Raumkorrektur erzielt werden kann, sondern nur, indem man den bisher in der kinetischen Gastheorie festgehaltenen Grundsatz, daß nur die lebendige Kraft der translatorischen Bewegung für den Druck bestimmend sei, dahin erweitert, daß auch ein Umsatz von innerer Energie in Arbeitsenergie, auch bei isothermen Vorgängen, angenommen wird.

§ 6. Für die Verfolgung dieses Gedankens ist die Frage von wesentlicher Bedeutung, was unter der inneren Verdampfungswärme

$$Q = \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial U}{\partial v} dv = \left(T \frac{dp_s}{dT} - p_s \right) (v_2 - v_1)$$

in kinetischer Deutung zu verstehen ist. Hr. W. Voigt hat zuerst die Deutung ausgesprochen, daß die Durchbrucharbeit D , welche in der Gleichung

$$p = \frac{R T}{v - b} e^{-\frac{D}{R T}}$$

auftritt, gleich der inneren Verdampfungswärme q sein müsse, so daß auf die Sättigungszustände angewendet

$$D = q = R T \ln \frac{v_2 - b}{v_1 - b}$$

folgt, wobei wiederum die Waalssche Raumkorrektur als konstant angenommen ist. Ich habe dann durch empirische Berechnung nachgewiesen¹⁾, daß man die Raumkorrektur entbehren und

$$q = c R T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

setzen kann, worin c ein Faktor ist, der für alle Substanzen, die S. Young als normale bezeichnet, einen nahezu gleichen Wert hat, der durch die kritischen Daten durch

$$c = \frac{1}{R T_k} \left(T_k \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_k - p_k \right) v_k = 2 - \left(\frac{p v}{R T} \right)_k$$

bestimmt ist und weil alle „normalen“ Substanzen nach Young den fast gleichen Wert für das Verhältnis des idealen zur tatsächlichen Volumen im kritischen Punkt

$$\frac{R T_k}{p_k v_k} = 3,75$$

zeigen, findet sich auch der Faktor c nahezu konstant für alle solche Stoffe.

Es ist mir aber nicht gelungen, die innere Verdampfungswärme so in zwei Teile zu zerlegen, daß der eine die Kohäsionsarbeit, der andere die Änderung der totalen Bewegungsenergie der Molekeln darstellt.

Bei diesen vielfältigen Berechnungen bin ich aber auf eine Beziehung gestoßen, die allgemeine Bedeutung hat und deshalb der Mitteilung wert erscheint.

Bildet man die Differenz der Arbeit, welche eine Substanz im idealen Gaszustand zwischen den beiden Sättigungsvolumen leisten könnte:

$$A_{id} = R T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

und der tatsächlichen äußeren Arbeit:

$$A_s = p_s (v_2 - v_1),$$

so ergibt sich, daß diese Differenz, die im $p v$ -Blatt eine leicht verständliche Bedeutung hat, dargestellt werden kann durch

1) C. Dieterici, Ann. d. Phys. 25. S. 569–585. 1908 u. Ann. d. Phys. 35. S. 220–242. 1911.

$$A_{i,d} - A_s = (a - R T v_k) (s_1 - s_2),$$

worin s_1 und s_2 die Sättigungsdichten bezeichnet und a eine Konstante ist, die wiederum durch den Faktor c der inneren Verdampfungswärme bestimmt ist, durch

$$a = c R T_k v_k.$$

In den folgenden Tab. 5 und 6 ist für Isopentan und Kohlensäure die Berechnung mit Hilfe der Sättigungsdaten ausgeführt.

Verfolgt man in Tab. 5 den Gang der „idealen“ Sättigungsarbeit

$$A_{i,d} = R T \ln \frac{v_2}{v_1}$$

für Isopentan und den der tatsächlichen $A_s = p_s (v_2 - v_1)$, so sieht man, daß die erstere kontinuierlich mit abnehmenden T wächst, die zweite aber ein deutlich ausgeprägtes Maximum hat. Trotzdem ist die Differenz mit überraschender Schärfe

Tabelle 5.

Isopentan; $M = 72,10$.

$T_k = 460,8^\circ \text{C}$; $R = 0,02753 \text{ cal/}^\circ \text{C}$; $R T_k = 12,686 \text{ cal}$; $v_k = 4,268 \text{ cm}^3$;

$$\frac{R T_k}{p_k v_k} = 3,735; a = 93,79 \text{ cal/cm}^3.$$

T	$p, \text{ cal/cm}^3$	v_2	v_1	A_s	$A_{i,d}$	$A_{i,d} - A_s$	$(a - R T v_k) (s_1 - s_2)$
460,8	0,7956	4,268	4,268	0	0	0	0
458	0,7637	6,355	3,183	2,423	8,72	6,30	6,27
453	0,7086	7,95	2,858	3,608	12,76	9,15	9,09
443	0,6078	10,71	2,555	4,956	17,48	12,52	12,44
433	0,5184	13,72	2,378	5,879	20,89	15,01	14,92
423	0,4394	17,14	2,250	6,542	23,64	17,10	17,03
413	0,3699	21,15	2,153	7,027	25,98	18,95	18,87
403	0,3090	26,10	2,072	7,425	28,11	20,68	20,63
393	0,2559	32,20	2,0037	7,727	30,04	22,31	22,28
383	0,2100	39,80	1,9455	7,949	31,82	23,87	23,86
373	0,1704	49,5	1,8940	8,112	33,51	25,40	25,38
363	0,1367	61,7	1,8475	8,181	35,06	26,88	26,85
353	0,1082	77,7	1,8055	8,212	36,56	28,35	28,31
343	0,08444	98,7	1,7679	8,185	37,98	29,80	29,71
333	0,06479	127,6	1,7329	8,155	39,41	31,25	31,09
323	0,04877	67,9	1,7005	8,105	40,84	32,74	32,50
313	0,0360	24,4	1,6700	8,018	42,24	34,22	33,89
303	0,02595	306,2	1,6413	7,905	43,61	35,70	35,26
293	0,01821	426,6	1,6141	7,747	44,18	36,43	36,65
283	0,01243	606,0	1,5885	7,514	46,31	38,80	38,01

Tabelle 6.

Kohlensäure; CO_2 , $M = 44$.

$$T_k = 304,35; R = 0,04518 \text{ cal/}^\circ\text{C}; v_k = 2,155 \text{ cm}^3; \frac{RT_k}{p_k v_k} = 3,620;$$

$$a = 51,08 \text{ cal/cm}^3.$$

T	$p, \text{ cal/cm}^3$	$v_2, \text{ cm}^3$	$v_1, \text{ cm}^3$	A	A_d	$A_d - A$	$(a - RT v_k)(s_1 - s_2)$
304,35	1,7635	2,155	2,155	0	0	0	0
304	1,7103	2,994	1,672	2,261	7,979	5,718	5,663
298	1,5313	4,167	1,422	4,203	14,473	10,473	10,218
293	1,3619	5,262	1,308	5,385	18,425	13,040	12,946
288	1,2095	6,329	1,228	6,170	21,336	15,166	15,213
283	1,0692	7,518	1,168	6,789	23,806	17,017	17,011
273	0,8329	10,42	1,095	7,767	27,790	20,023	20,017
263	0,6474	13,70	1,042	8,196	30,608	22,412	22,574
253	0,4820	18,87	1,000	8,613	33,578	24,965	25,04
248	0,4140	23,10	0,983	9,157	35,360	26,203	26,21

gleich $(a - RT v_k)(s_1 - s_2)$, einem Ausdruck, in dem die auftretenden Konstanten allein durch die kritischen Daten bestimmt sind.

Auch Kohlensäure zeigt eine vollkommene Übereinstimmung in dem Temperaturbereich, für den Beobachtungen vorliegen.

Auch an anderen normalen Stoffen, wie Benzol, Methylformiat und anderen, für welche das Beobachtungsmaterial in Youngs umfangreichen Tabellen vorliegt, bestätigt sich die aufgestellte Beziehung, bei anomalen Stoffen, wie Wasser und Äthylalkohol zeigen sich allerdings Abweichungen.

Man hat also in der aufgestellten Beziehung eine ähnliche aus den Beobachtungen abgelesene empirische Tatsache, wie die für die innere Verdampfungswärme $q = c R T \ln \frac{v_2}{v_1}$ schon früher ermittelte.

Alle meine Versuche, diese Beobachtungstatsachen im Sinne eines Umsatzes von innerer Energie in Arbeitsenergie in die kinetische Gastheorie einzuführen und sie damit für die notwendige Erweiterung der Zustandsgleichung fruchtbar zu machen, haben aber nicht zu einem Resultat geführt, welches ich der Mitteilung für wert erachte.

Kiel, Oktober 1919.

1) Sättigungsdaten nach Landolt-Börnsteinschen Tabellen.

(Eingegangen 28. November 1919.)

4. *Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie;* *von A. Sommerfeld.*

Hr. Weyl hat dieses von mir vor zehn Jahren behandelte Problem einer Neubearbeitung unterzogen und dabei *in methodischer Hinsicht* erfreuliche Fortschritte erreicht, wie bei einem Mathematiker vom Range des Hrn. Weyl selbstverständlich ist. So gelten die Näherungen Weyls für den ganzen Halbraum $z > 0$ (Luft), während ich mich auf die nächste Umgebung der Trennungsfläche $z = 0$ (Luft gegen Erde) beschränkt habe. Auch die von Weyl betonte (von mir übrigens ebenfalls ins Auge gefaßte) Darstellung meiner Lösung als eines komplexen Doppelintegrals (an Stelle eines komplexen, einfachen Integrals mit Besselschen Funktionen) leuchtet ein. Ob der Weylsche Weg zur Diskussion meiner Lösung schließlich bequemer ist als der meinige, läßt sich objektiv kaum beurteilen und hängt von der Denkgewöhnung ab; daß er eine Verschärfung der Fehlerabschätzung bedeutet, ist sicher.

Dagegen glaube ich, für solche Leser, welche sich auf den verschlungenen Pfaden komplexer Integration, zumal denjenigen der Weylschen komplexen Doppelintegrale, nicht mühe-los zurechtfinden — und das dürfte bei den Interessenten der drahtlosen Telegraphie die Mehrzahl sein — feststellen zu sollen, daß die Weylsche Behandlung *in sachlicher Hinsicht* und *für praktische Zwecke* nichts Neues bietet. Die Weylsche Schlußformel (23) für $z = 0$ ist mit meinen Formeln (47) und (55) bis auf die abgeänderten Bezeichnungen völlig identisch. Ebenso stimmen seine Reihenentwicklungen von S. 498 mit meinen Reihen (54) und (42) nach auf- und absteigenden Potenzen der numerischen Entfernung genau überein. Unter diesen Umständen ist mir die von Hrn. Weyl an meinen Resultaten geübte Kritik nicht recht verständlich. Wenn Hr. Weyl als Raumwellen nur solche Wellen definiert, deren Energie wie $1/r^3$ abnimmt, so ist seine Zerlegung auf S. 500 von der meinigen natürlich verschieden. Ich definierte als „Raumwellen“

solche Wellen, deren Energie wie $1/r^2$ und stärker, als „Oberflächenwellen“ solche, deren Energie wie $1/r$ abnimmt (Zylinder statt Kugel als Wellenfläche). Ich glaube, daß man dieser Definition ebensoviel oder ebensowenig „sachliche Berechtigung zuerkennen“ muß, wie der Weylschen. Das interessante Resultat meiner Arbeit war doch, daß die von Uller und Zenneck früher beschriebenen elektromagnetischen Wellen sich aus der Strahlung eines Dipols heraus von selbst entwickeln und sich hier als Oberflächenwellen erweisen, weil die Energie, abgesehen von der exponentiellen Dämpfung, wie $1/r$ abnimmt. Daß diese Wellen bei mir aus dem Gesamtvorgang durch bloße Residuenbildung isoliert werden konnten (mein Pol $\lambda = s$ ist identisch mit dem Weylschen Pole $\gamma = ta$), war besonders befriedigend. Auch die „Nebenwellen“ des Hrn. Weyl kommen bei mir als „Raumwellen Q_2 “ [Gl. (34)] vor; daß sie belanglos sind, ist auch aus meiner Darstellung unmittelbar ersichtlich. Wenn Hr. Weyl am Ende von § 2 „keine Andeutung für die Trennung des Vorganges in Raum- und Oberflächenwellen“ findet, so steht auch das nicht in Widerspruch mit meinen Resultaten, da Hr. Weyl hier stillschweigend den Fall großer numerischer Entfernung voraussetzt, in welchem die Oberflächenwellen exponentiell abgedämpft sind und in der asymptotischen Darstellung von Weyl naturgemäß nicht mehr vorkommen. Die dann allein übrigbleibenden Raumwellen andererseits lauten für die Nähe der Trennungsfläche bei Weyl und mir wieder vollkommen gleich.

Die von mir als „numerische Entfernung“ bezeichnete und in ihrer prinzipiellen Bedeutung herausgearbeitete Größe kommt bei Hrn. Weyl anhangsweise als rechnerische Abkürzung $r_1 = r/|n^2|$ vor. Daß aber in der Einführung dieser Abkürzung das *Ähnlichkeitsgesetz der drahtlosen Telegraphie* liegt und daß die Verhältnisse für kleine und große numerische Entfernung sich ganz verschieden gestalten, trotzdem sie sich in eine einheitliche Formel, bei mir Gl. (55), bei Weyl Gl. (23), zusammenfassen lassen, wird dem Leser der Weylschen Abhandlung kaum zum Bewußtsein kommen.

(Eingegangen 7. Januar 1920.)

r-
er
er
ng
l.
k
er
er
on
en
ng
m
ch
n-
us
yl
es
ht
la
er
x-
r-
ie
en
er

te
de
ng
r-
ad
t-
in
3),
b-